ملزمة شرح

حساب المثلثات والهندسة

الصف الثالث الأعدادى

الفصل الدراسى الأول

منتدى توجيه الرياضيات أ/ عادل إدوار



الهندسة التحليلية وحساب المثلثات

الفصل الدراسي الأول

٣ اعدادي

إعداد أ / إبراهيم ميكائيل
٠١٠٢٠٦١٢٠٠٢
٠١١٥٥٧٢٢١٦٩

الوحدة الرابعة : حساب المثلثات

الدرس الأول
النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

قبل ما نبدأ إن كنت ناسي أفكرك

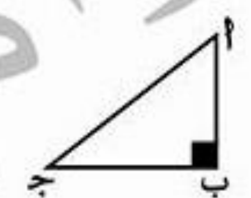
نظرية فيثاغورث :

في المثلث القائم الزاوية مساحة المربع المنشأ على الوتر تساوى مجموع مساحتي المربعين المنشأين على ضلعي القائمة .

مثلا : في الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠ب) = ٩٠°

فإن :



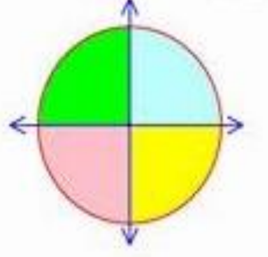
(أجـ)^2 = (أب)^2 + (بجـ)^2

(أب)^2 = (أجـ)^2 − (بجـ)^2

(بجـ)^2 = (أجـ)^2 − (أب)^2

القياس الستينى للزوايا :

درسنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°



، وإذا قسمت هذه الزوايا إلى أربعة أرباع متساوية فإن الربع الواحد

يحتوى على ٩٠° (زاوية قائمة) ، والدرجة هي وحدة القياس الستيني ،

كما توجد أجزاء من الدرجة على النحو التالي

الدرجة = ٦٠ دقيقة ، الدقيقة = ٦٠ ثانية

فمثلاً : ٤٥ درجة ، ٣٨ دقيقة ، ٥٢ ثانية تكتب

٥٤″ ٣٦′ ٤٥°

تحويل الدقائق والثواني إلى أجزاء من الدرجة :

هناك طريقتان لتحويل الدقائق والثواني إلى أجزاء من الدرجة

أولاً : نحول ٣٦′ إلى درجات ٣٦′ = $\frac{٣٦}{٦٠}$ = ٠,٦°

ونحول ٥٤″ أولاً إلى دقائق ثم إلى درجات

٥٤″ = $\frac{٥٤}{٦٠}$ = ٠,٩′ ، ٠,٩′ = $\frac{٠,٩}{٦٠}$ = ٠,٠١٥°

فيكون الناتج ٥٤″ ٣٦′ ٤٥° =

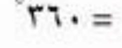
٤٥° + ٠,٦° + ٠,٠١٥ = ٤٥,٦١٥°

ثانياً : باستخدام الآلة الحاسبة :

٤٥ [°′″] ٣٦ [°′″] ٥٤ = ٤٥,٦١٥°

تحويل أجزاء الدرجة إلى دقائق وثواني :

فمثلاً : ٤٥,٦١٥° يمكن تحويلها إلى درجات ودقائق وثواني باستخدام المفاتيح التالية :

٤٥,٦١٥° [=]  [°′″] فيكون الناتج

٥٤″ ٣٦′ ٤٥°

مثال ١ : إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستيني .

الحل

نفرض أن قياس الزاويتين هما ٣س ، ٥س

∵ الزاويتين متتامتين ∴ مجموع قياسيهما ٩٠°

∴ ٣س + ٥س = ٩٠° ∴ ٨س = ٩٠°

∴ س = $\frac{٩٠^\circ}{٨}$ = ١١,٢٥°

∴ قياس الزاوية الأولى

= ٣ × ١١,٢٥ = ٣٣,٧٥° = ٤٥ َ ٣٣°

قياس الزاوية الثانية

= ٥ × ١١,٢٥ = ٥٦,٢٥° = ١٥ َ ٥٦°

مثال ٢ : إذا كانت النسبة بين قياسات زوايا مثلث كنسبة ٣ : ٤ : ٧ **فأوجد** القياس الستيني لكل زاوية من زواياه .

الحل

نفرض أن قياسات زوايا المثلث هما :
٣س ، ٤س، ٧س

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث ١٨٠°

∴ ٣س + ٤س + ٧س = ١٨٠° ∴ ١٤س = ١٨٠°

∴ س = $\frac{١٨٠^\circ}{١٤}$ = ١٢,٨٦

∴ قياس الزاوية الأولى = ٣ × ١٢,٨٦ = ٣٨,٦°

قياس الزاوية الثانية = ٤ × ١٢,٨٦ = ٥١,٤°

قياس الزاوية الثالثة = ٧ × ١٢,٨٦ = ٩٠°

النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

سنقوم بدراسة النسب الأساسية للزاوية الحادة

وهي كالتالي :

(١) جيب الزاوية : ويرمز له بالرمز (جا) (*sin*)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

(٢) جيب تمام الزاوية : ويرمز له بالرمز (جتا) (*cos*)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}{\text{طول الوتر}}$

(٣) ظل الزاوية : ويرمز له بالرمز (ظا) (*tan*)

وتساوي $\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية}}$

فمثلاً : في الشكل المقابل :

النسب المثلثية للزاوية أ هي :

جا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$ ،

جتا أ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$ ،

ظا أ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$

أ ، ب ، ج

النسب المثلثية الأساسية للزاوية ج

جا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}}$ ،

جتا ج = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{\text{ب ج}}{\text{أ ج}}$ ،

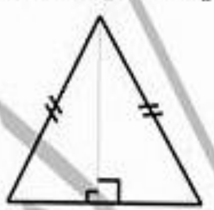
ظا ج = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب ج}}$

ملاحظات هامة جداًااا

عشان نحل سؤال نسب مثلثية عندي شوية شروط

(١) لازم يكون عندي مثلث قائم طب لو مكنش موجود أحنا نوجده يعنى لو المثلث مش مرسوم نرسمه

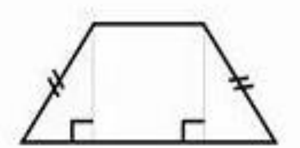
* لو مثلث متساوي الساقين نسقط عمود على القاعدة



* لو شبه منحرف قائم نسقط عمود واحد برضوا



* أما لو شبه منحرف متساوي الساقين فنسقط له عمودين



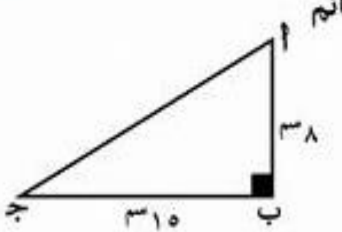
(٢) لازم يكون أطوال أضلاع المثلث الثلاثة معلومة يعنى لو في ضلع ناقص لازم نوجده

تعالى نشوف أمثلة توضح الكلام ده :

مثال ١ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ب = ٨ سم ، ب جـ = ١٥ سم ، **اكتب** ما تساويه كل من النسب المثلثية الآتية : جاجـ ، جتاأ ، جتاجـ ، ظاجـ

الحل

أولاً : نرسم المثلث القائم



ثانياً : نوجد طول $\overline{\text{أجـ}}$ ∵ ق(∠ ب) = ٩٠°

∴ (أجـ)² = (أب)² + (بجـ)²

∴ (أجـ)² = (٨)² + (١٥)²

∴ (أجـ)² = ٦٤ + ٢٢٥ = ٢٨٩

∴ أجـ = $\sqrt{٢٨٩}$ = ١٧ سم

جاجـ = $\frac{٨}{١٧}$ ، جتاأ = $\frac{٨}{١٧}$

جتاجـ = $\frac{١٥}{١٧}$ ، ظاجـ = $\frac{٨}{١٥}$

مثال ٢ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث فيه ق(∠ أ) = ٩٠°

، أ جـ = ١٥ سم ،

أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن :

جتاجـجتاب − جاجـجاب = صفر

الحل

∵ ق(∠ أ) = ٩٠° من نظرية فيثاغورث

∴ (ب جـ)² = (أب)² + (أجـ)²

∴ (ب جـ)² = ٤٠٠ + ٢٢٥ = ٦٢٥

∴ ب جـ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

الطرف الأيمن : جتاجـجتاب − جاجـجاب =

$\frac{١٥}{٢٥} \times \frac{٢٠}{٢٥} - \frac{٢٠}{٢٥} \times \frac{١٥}{٢٥} = \frac{٣٠٠}{٦٢٥} - \frac{٣٠٠}{٦٢٥}$ = صفر =

الطرف الأيسر

مثال ٣: س ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص فيه
س ص = ٥سم ، س ع = ١٣سم ، **أوجد** قيمة :
(أ) ظاس+ظاع
(ب) جاس جتاع − جتاس جاع
(ج) جاس جتاع + جتاس جاع

الحل

∵ ق(∠ ص) = ٩٠°
∴ (ص ع)^2 = (س ع)^2 − (س ص)^2
∴ (ص ع)^2 = ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤
∴ ص ع = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

س
١٣سم
٥سم
ع ص

(أ) ظاس+ظاع = $\frac{١٢}{٥} + \frac{٥}{١٢} = \frac{١٤٤+٢٥}{٦٠} = \frac{١٦٩}{٦٠}$
(ب) جاس جتاع − جتاس جاع
= $\frac{٥}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} - \frac{١٢}{١٣} \times \frac{٥}{١٣} = \frac{٦٠}{١٦٩} - \frac{٦٠}{١٦٩} = \frac{صفر}{١٦٩}$ = صفر
(ج) جاس جتاع + جتاس جاع
= $\frac{١٢}{١٣} \times \frac{١٢}{١٣} + \frac{٥}{١٣} \times \frac{٥}{١٣}$
= $\frac{١٤٤}{١٦٩} + \frac{٢٥}{١٦٩} = \frac{١٦٩}{١٦٩}$ = ١

مثال ٤ : س ص ع مثلث قائم الزاوية في ع فيه
س ع = ٧سم، س ص = ٢٥سم ، **أوجد** قيمة كل من
(أ) ظاس×ظاص
(ب) جا^{2}س+جا^{2}ص

الحل

∵ ق(∠ ع) = ٩٠°
∴ (ص ع)^2 = (س ص)^2 − (س ع)^2
∴ (ص ع)^2 = ٦٢٥ − ٤٩ = ٥٧٦
∴ ص ع = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

س
٢٥سم
٧سم
ص ع

(أ) ظاس×ظاص = $\frac{٢٤}{٧} \times \frac{٧}{٢٤}$ = ١

(ب) جا^{2}س+جا^{2}ص = $\left(\frac{٢٤}{٢٥}\right)^2 + \left(\frac{٧}{٢٥}\right)^2$
= $\frac{٥٧٦}{٦٢٥} + \frac{٤٩}{٦٢٥} = \frac{٦٢٥}{٦٢٥}$ = ١

تدريب ١ : أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فإذا كان ٢أب = $\sqrt{٣}$أجـ **فأوجد** النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....

تدريب٢ : فى المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ حيث أب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم **أوجد** قيمة :
جاأ جتاب+جتاأ جاب

الحل

....
....
....
....
....
....
....
....

مثال ٥ : أ ب ج ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه

$\overline{أء} \parallel \overline{بج}$. أء = ٤ سم ، أب = ٥ سم

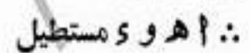
، ب ج = ١٢ سم **أثبت** أن : $\frac{٥ \text{ طا ب جتا ج}}{\text{جا}^٢ \text{ج} + \text{جتا}^٢ \text{ب}} = ٣$

الحل

العمل : نرسم $\overline{أهـ} \perp \overline{بج}$ ، $\overline{ءو} \perp \overline{بج}$

البرهان : ∵ $\overline{أء} \parallel \overline{بج}$ ، $\overline{أهـ} \perp \overline{بج}$ ،

$\overline{ءو} \perp \overline{بج}$



∴ أ هـ و ء مستطيل

∴ هـ و = ٤ سم

∴ ب هـ + و ج = ٨ سم

∴ ب هـ = و ج = ٤ سم

في Δ أ ب هـ القائم الزاوية في هـ

$(\text{أهـ})^٢ = (٥)^٢ - (٤)^٢ = ٩$ ∴ أهـ = ٣ سم

∵ أ هـ و ء مستطيل ∴ أهـ = ءو = ٣ سم

∴ الطرف الأيمن $\frac{٥ \text{ طا ب جتا ج}}{\text{جا}^٢ \text{ج} + \text{جتا}^٢ \text{ب}} = \frac{٥ \times \frac{٣}{٤} \times \frac{٤}{٥}}{\left(\frac{٣}{٥}\right)^٢ + \left(\frac{٤}{٥}\right)^٢}$

$= \frac{٣}{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}} = \frac{٣}{\frac{٢٥}{٢٥}} = \frac{٣}{١} = ٣$

مثال ٦ : أ ب ج مثلث فيه أب = أج = ١٠ سم ،

ب ج = ١٢ سم ، رسم $\overleftrightarrow{أء} \perp \overline{بج}$ ،

$\overleftrightarrow{أء} \cap \overline{بج} = \{ء\}$

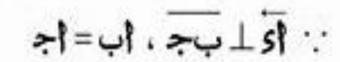
أولاً : **أوجد** قيمة : جا(∠ج أ ء) ، جتا(∠ج أ ء) ،

طا(∠ج أ ء)

ثانياً : **أثبت** أن : (أ) $\text{جا}^٢ \text{ج} + \text{جتا}^٢ \text{ج} = ١$

(ب) جا ب + جتا ج > ١

الحل



∵ $\overleftrightarrow{أء} \perp \overline{بج}$ ، أب = أج

∴ ء منتصف $\overline{بج}$

∴ ب ء = ء ج = ٣ سم

في Δ أ ب ء القائم الزاوية في ء

$(\text{أء})^٢ = (١٠)^٢ - (٦)^٢ = ٦٤$

∴ أء = ٨ سم

أولاً : جا(∠ج أ ء) $= \frac{٦}{١٠} = \frac{٣}{٥}$ ،

جتا(∠ج أ ء) $= \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

طا(∠ج أ ء) $= \frac{٦}{٨} = \frac{٣}{٤}$

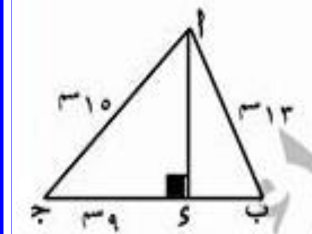
ثانياً : (أ) الطرف الأيمن $\text{جا}^٢ \text{ج} + \text{جتا}^٢ \text{ج} =$

$\left(\frac{٨}{١٠}\right)^٢ + \left(\frac{٦}{١٠}\right)^٢ = \frac{٦٤}{١٠٠} + \frac{٣٦}{١٠٠} = ١$

(ب) الطرف الأيمن جا ب + جتا ج

$= \frac{٨}{١٠} + \frac{٦}{١٠} = \frac{١٤}{١٠} = ١{,}٤ > ١$

تدريب ٣ : في الشكل المقابل :



$\overline{أء} \perp \overline{بج}$ ، أب = ١٣ سم ،

أج = ١٥ سم ، ءج = ٩ سم

أوجد في أبسط صورة قيمة : $\frac{\text{طا}(\angle \text{ج أ ء}) + \text{طا}(\angle \text{ب أ ء})}{\text{طا}(\angle \text{ج أ ء}) - \text{طا}(\angle \text{ب أ ء})}$

الحل

....

....

....

....

....

ملاحظات هااامة جداا خذ بالك منها

(١) جيب الزاوية يساوي جيب تمام الزاوية المتممة لها

أي أن : جا ٣٠° = جتا ٦٠° ، جتا ٧٠° = جا ٢٠°

(٢) إذا كان : جا أ = جتا جـ فإن :

ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ٩٠°

(٣) إذا كان : جا أ = جتا جـ فإن : $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا جـ}} = ١$

(٤) لأى زاوية أ يكون : ظا أ = $\frac{\text{جا أ}}{\text{جتا أ}}$

تمارين (١)

(١) **أكمل ما يأتي:**

(١) ٢٤° ٣٦′ ٤٦″ = ... (بالدرجات)

(٢) ٤٤,١٢٥° = ... (بالدرجات والدقائق والثواني)

---

(٢) إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متكاملتين كنسبة ٣ : ٥ **فأوجد** مقدار كل منهما بالقياس الستيني .

---

(٣) (محافظة القاهرة ٢٠١٦)

إذا كانت النسبة بين قياسي زاويتين متتامتين هي ٣ : ٥ **فأوجد** قياس كل منهما بالدرجات والدقائق .

---

(٤) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:**

(١) إذا كان ق(∠أ) = ٨٥° ، جا ب = جتا ب في △أ ب جـ فإن : ق(∠جـ) = ...

(٣٠° ، ٤٥° ، ٥٠° ، ٦٠°)

(٢) في △أ ب جـ القائم الزاوية في ب يكون جا أ + جتا جـ يساوي ......

(٢ جا أ ، ٢ جتا جـ ، ٢ جتا ب ، ٢ جتا أ)

(٣) في △أ ب جـ القائم الزاوية في جـ يكون جا ب + جتا ب ١

(= ، < ، > ، ≥)

(٤) △س ص ع قائم الزاوية في ع ، س ص = ٢٥ سم ، ص ع = ٧ سم ، س ع = ٢٤ سم فتكون جا س + جا ص = ...

($\frac{٣١}{٢٥}$ ، $\frac{١٧}{٢٥}$ ، ١ ، ٢)

(٥) △أ ب جـ قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم فيكون جا أ جتا أ = ...

(١ ، $\frac{٩}{٢٥}$ ، $\frac{١٢}{٢٥}$ ، $\frac{١٦}{٢٥}$)

(٦) في الشكل المقابل :

جتا أ = ...

($\frac{٥}{١٢}$ ، $\frac{١٢}{٥}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$ ، $\frac{٥}{١٣}$)

(٧) في الشكل المقابل :

إذا كان : $\overline{\text{أب}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، أ ب = ٦ سم ، أ جـ = ٦ سم

فإن : ظا أ = ...

($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٣}$)

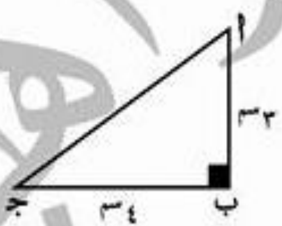
(٥) أب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ب) = ٩٠° فإذا كان : أب = ٣ سم ، أء = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم فأثبت أن :

جا(∠ء جـ ب) − ظا(∠أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$

(٦) أوجد قيمة : جا أ جتا ب + جتا أ جا ب في Δ أب جـ القائم الزاوية في جـ حيث : أب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم .

(٧) في الشكل المقابل :

أب جـ مثلث فيه : ق(∠ب) = ٩٠° ، أب = ٣ سم ، ب جـ = ٤ سم

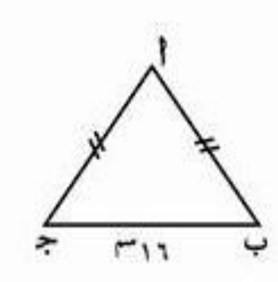


أوجد : (١) جا² أ + جا² جـ

(٢) ظا أ × ظا جـ

(٨) في الشكل المقابل :

إذا كان : أب جـ مثلثاً فيه : أب = أجـ ، ب جـ = ١٦ سم ، جتا ب = $\frac{٤}{٥}$



فأوجد : مساحة سطح Δ أب جـ

(٩) أب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، أب = ٥ سم ، ب جـ = ٣ سم أوجد :

(١) طول $\overline{\text{أ جـ}}$ (٢) جا أ ، جتا ب ، ظا أ ظا ب

(١٠) أب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، أب = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم أوجد قيمة : ١ + ظا² أ

(١١) س ص ع مثلث قائم الزاوية في ص فيه : س ص = ٣ سم ، س ع = ٥ سم أوجد قيمة :

(١) ظا س × ظا ع (٢) جا² س + جا² ع

(١٢) مثلث أب جـ قائم الزاوية في ب فإذا كان : أب : أجـ = ٣ : ٥ فأوجد النسب المثلثية الأساسية للزاوية أ .

(١٣) أب جـ مثلث متساوي الساقين فيه : أب = أجـ ، جا $\frac{أ}{٢}$ = $\frac{٤}{٥}$ أوجد : جتا ب (بدون استخدام الحاسبة)

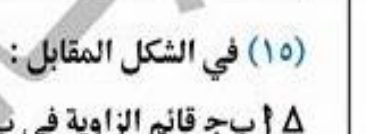
(١٤) أب جـ مثلث فيه أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم ، $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، وتلقاها في ء .

أثبت أن :

أولاً : جتا ب + جتا ب = ١,٤

ثانياً : جا² جـ + جتا² جـ = ١

(١٥) في الشكل المقابل :



Δ أب جـ قائم الزاوية في ب ، أجـ = ٥ سم ، ب جـ = ٤ سم

أوجد :

أولاً : طول $\overline{\text{أب}}$

ثانياً : جا² أ + جا² جـ − ١

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في ب ، أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم **أثبت** أن : جتا أ جتا جـ − جا أ جا جـ = صفر

(البحر الأحمر ٢٠١٨)

---

(٢) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلثاً فيه ق(∠أ) = ٩٠°

، أ جـ = ١٥ سم ، أ ب = ٢٠ سم

أثبت أن :

جتا جـ جتا ب − جا جـ جا ب = صفر

(القليوبية ٢٠١٨)

---

(٣) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم **أثبت** أن :

$1 +$ جا^2 أ = ٢ جتا^2 جـ + جتا^2 أ

(الإسكندرية ٢٠١٨)

---

(٤) في الشكل المقابل : أ ب جـ مثلث فيه :

ق(∠ب) = ٩٠° ، أ جـ = ٥ سم

، ب جـ = ٣ سم أوجد قيمة :

(١) جا جـ − جتا جـ + ظا جـ

(٢) جا أ جتا جـ + جتا أ جا جـ

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(٥) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٢ سم **أوجد** قيمة : جا جـ + جتا أ

(الجيزة ٢٠١٨)

---

(٦) أ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ ، ق(∠ ب) = ٩٠° فإذا كان :

أ ب = ٣ سم ، أ ء = ٦ سم ، ب جـ = ١٠ سم

أوجد :

(١) طول $\overline{جـ ء}$

(٢) جتا(∠ب جـ ء)

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

---

(٧) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

فيه أ ب = ٥ سم ،

أ جـ = ١٣ سم

أوجد قيمة :

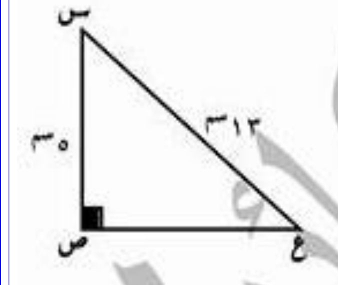
(١) ظا أ × ظا جـ

(٢) جتا أ جتا جـ − جا أ جا جـ

(بني سويف ٢٠١٨)

---

(٨) في الشكل المقابل :



س ص ع مثلث قائم الزاوية عند ص ، س ص = ٥ سم ، س ع = ١٣ سم

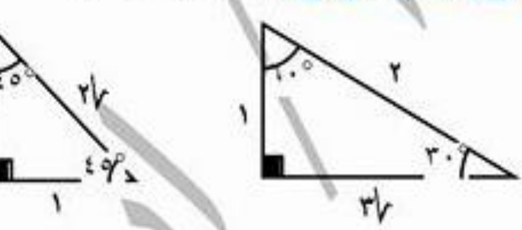
أوجد قيمة : ظا س + ظا ع

(البحيرة ٢٠١٨)

الدرس الثاني

النسب المثلثية الأساسية لبعض الزوايا

سوف ندرس في هذا الجزء النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة وهي ٣٠° ، ٦٠° ، ٤٥°



والجدول التالي يلخص لنا النسب الأساسية للزوايا الثلاثة :

الزاوية / النسبة المثلثية	٣٠°	٦٠°	٤٥°
جا	$\frac{\text{١}}{\text{٢}}$	$\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$
جتا	$\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}$	$\frac{\text{١}}{\text{٢}}$	$\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}$
ظا	$\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}$	$\sqrt{\text{٣}}$	١

مثال ١ : أوجد قيمة :

جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°

الحل

المقدار : جتا ٦٠° جا ٣٠° − جا ٦٠° ظا ٦٠° + جتا² ٣٠°

$$= \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} - \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \times \sqrt{\text{٣}} + \left(\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} - \frac{\text{٣}}{\text{٢}} + \frac{\text{٣}}{\text{٤}} = -\frac{\text{١}}{\text{٢}}$$

مثال ٢ : أوجد قيمة :

$$\frac{\text{جا ٣٠° جتا ٤٥° + جتا ٣٠° جا ٤٥°}}{\text{جا ٤٥° جتا ٦٠° + جتا ٤٥° جا ٦٠°}}$$

الحل

المقدار: $\frac{\text{جا ٣٠° جتا ٤٥° + جتا ٣٠° جا ٤٥°}}{\text{جا ٤٥° جتا ٦٠° + جتا ٤٥° جا ٦٠°}}$

$$= \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} + \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}}{\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}} \times \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}} = \frac{\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} + \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}}{\frac{\text{١}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}} + \frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}}$$

$$= \frac{\frac{\text{١} + \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}}{\frac{\text{١} + \sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}\sqrt{\text{٢}}}} = \text{١}$$

مثال ٣ : أوجد قيمة :

$\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ جا² ٤٥° ظا² ٦٠° − $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ جا² ٦٠° ظا² ٣٠°

الحل

المقدار : $\frac{\text{١}}{\text{٤}}$ جا² ٤٥° ظا² ٦٠° − $\frac{\text{١}}{\text{٣}}$ جا² ٦٠° ظا² ٣٠°

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \left(\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٢}}}\right)^{\text{٢}} \times \left(\sqrt{\text{٣}}\right)^{\text{٢}} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \left(\frac{\sqrt{\text{٣}}}{\text{٢}}\right)^{\text{٢}} \times \left(\frac{\text{١}}{\sqrt{\text{٣}}}\right)^{\text{٢}}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٤}} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٣} - \frac{\text{١}}{\text{٣}} \times \frac{\text{٣}}{\text{٤}} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٣}}{\text{٨}} - \frac{\text{١}}{\text{١٢}} = \frac{\text{٧}}{\text{٢٤}}$$

تدريب ١ : أوجد قيمة كلاً من :

(أ) (جتا ٣٠° − جتا ٦٠°)(جا ٣٠° + جا ٦٠°)

(ب) $\frac{\text{جتا² ٦٠° + جتا² ٣٠° + ظا² ٤٥°}}{\text{جا ٦٠° ظا ٦٠° − جا ٣٠°}}$

الحل

(أ) ....

....

(ب) ....

....

مثال ٤ : برهن على صحة أن :

جا٣٠°٣ = ٩جتا٦٠°٣ − ظا٤٥°٢

الحل

الطرف الأيمن : جا٣٠°٣ = $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{١}{٨}$ ← (١)

الطرف الأيسر : ٩جتا٦٠°٣ − ظا٤٥°٢

$= ٩ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} - (١)^{٢} = ٩ \times \frac{١}{٨} - ١ = \frac{٩}{٨} - ١ = \frac{١}{٨}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) الطرفان متساويان

مثال ٥ : أثبت أن : ظا٦٠° = $\frac{٢ظا٣٠°}{١-ظا٣٠°٢}$

الحل

الطرف الأيمن : ظا٦٠° = $\sqrt{٣}$ ← (١)

الطرف الأيسر : $\frac{٢ظا٣٠°}{١-ظا٣٠°٢} = \frac{٢ \times \frac{١}{\sqrt{٣}}}{١-\left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^{٢}} = \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{١-\frac{١}{٣}}$

$= \frac{\frac{٢}{\sqrt{٣}}}{\frac{٢}{٣}} = \frac{٣}{\sqrt{٣}} \times \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٣}} = \frac{٣\sqrt{٣}}{٣} = \sqrt{٣}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) الطرفان متساويان

تدريب٢ : أثبت أن :

(أ) جتا٦٠° = ٢جتا٣٠°٢ − ١

(ب) $\frac{ظا٣٠°٢ ظا٤٥° ظا٦٠°٢ + ظا٣٠° ظا٦٠°}{جا٦٠°٢ − ظا٤٥° جا٣٠°} = ٨$

الحل

(أ) ....

....

(ب) ....

....

إيجاد الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها :

سبق وأن درست إذا علمت زاوية فيمكن إيجاد النسبة المثلثية لها .

والآن نريد معرفة الزاوية إذا علمت النسبة المثلثية لها .

فمثلاً : إذا كان : جاس = ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ والمطلوب معرفة قيمة س

نقوم باستخدام الآلة الحاسبة كما يلي :

shift sin ٠,٥٤٤٦٣٩٠٣٥ = [°’’’] ٣٣°

مثال ١ : أوجد ق(∠هـ) في كل مما يأتي :

جاهـ = ٠,٦ ، جتاهـ = ٠,٦٢١٧ ، ظاهـ = ١,٠٨٢٣

الحل

∵ جاهـ = ٠,٦ shift sin ٠,٦ = [°’’’]

∴ ق(∠هـ) = ٣٦° ٥٢َ ١٢ً

∵ جتاهـ = ٠٫٦٢١٧   ,,, = ٠٫٦٢١٧ cos shift

∴ ق(∠هـ) = ٣٥ً ٣٣َ ٥١°

∵ ظاهـ = ١٫٠٠٨٢٣   ,,, = ١٫٠٠٨٢٣ tan shift

∴ ق(∠هـ) = ٤٨ً ١٥َ ٤٧°

تدريب١ : إذا كان : ظاهـ = ١٫٤٢ حيث هـ قياس زاوية حادة فإن : ق(∠هـ) = ...

مثال ٢ : **أوجد** قيمة س التي تحقق :

س جا٣٠° جتا٤٥° = جا²٦٠°

الحل

∵ س جا٣٠° جتا٤٥° = جا²٦٠°

∴ س × $\frac{١}{٢}$ × $\left(\frac{١}{\sqrt{٢}}\right)$ = $\left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^{٢}$

∴ $\frac{١}{٤}$س = $\frac{٣}{٤}$ ∴ س = $\frac{٣}{٤}$ × ٤   ∴ س = ٣

مثال ٣: **أوجد** قيمة س حيث س زاوية حادة التي تحقق : ٢جاس = ظا²٦٠° − ٢ظا٤٥°

الحل

∵ ٢جاس = ظا²٦٠° − ٢ظا٤٥°

∴ ٢س = $\left(\sqrt{٣}\right)^{٢}$ − ٢×١ = ٣ − ٢ = ١

∴ ٢جاس = ١   ∴ جاس = $\frac{١}{٢}$ ∴ ق = ٣٠°

مثال ٤ : **أوجد** ق(∠هـ) حيث هـ زاوية حادة :

٣ظا²هـ = ٤جا²٣٠° + ٨جتا²٦٠°

الحل

∵ ٣ظا²هـ = ٤جا²٣٠° + ٨جتا²٦٠°

∴ ٣ظا²هـ = ٤ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$ + ٨ × $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٢}$

∴ ٣ظا²هـ = ٤ × $\frac{١}{٤}$ + ٨ × $\frac{١}{٤}$

٣ظا²هـ = ١ + ٢ ⟸ ٣ظا²هـ = ٣

∴ ظا²هـ = ١ ← ظاهـ = ١

∴ ق(∠هـ) = ٤٥°

تدريب٢ : **أوجد** قيمة : س إذا كان :

جاس = جا٦٠° جتا٣٠° − جتا٦٠° جا٣٠°

حيث : ٠° < س < ٩٠°

الحل

....

....

....

....

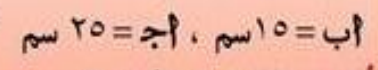
....

....

الربط بالهندسة :

مثال ١ : في الشكل المقابل :

أب جـ ء مستطيل فيه :



اب = ١٥سم ، اجـ = ٢٥ سم

أوجد : (١) ق(∠اجـب)

(٢) مساحة سطح المستطيل أب جـ ء

الحل

في △أب جـ ∵ ق(∠ب) = ٩٠°

من خواص المستطيل

∴ (ب جـ)^2 = (٢٥)^2 − (١٥)^2 = ٤٠٠

∴ ب جـ = ٢٠ سم

(١) ∵ جا(∠أ جـ ب) = $\frac{١٥}{٢٥}$

 = sin (١٥ ÷ ٢٥) shift

∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٢ َ ٥٢ ً ٣٦°

(٢) مساحة المستطيل أ ب جـ ء

= ١٥ × ٢٠ = ٣٠٠ سم^2

مثال ٢ : في الشكل المقابل :

أ ب جـ ء شبه منحرف متساوي الساقين فيه :

أ ب = أ ء = ء جـ = ١٠ سم ،

ب جـ = ٢٢ سم

أوجد :

(١) ق(∠ب) ، ق(∠أ)

(٢) مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء

الحـل

العمل : نرسم $\overline{أ و} \perp \overline{ب جـ}$ ،

$\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$

البرهان : ∵ $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$ ،

$\overline{أ و} \perp \overline{ب جـ}$ ، $\overline{ء هـ} \perp \overline{ب جـ}$

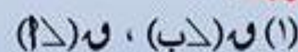
∴ أ هـ و ء مستطيل ∴ و هـ = ١٠ سم

∴ ب و + هـ جـ = ١٢ سم

ومن تطابق △△ أ ب و ، ء جـ هـ

∴ ب و = هـ جـ ∴ ب و = ٦ سم

في △ أ ب و ∵ جتا ب = $\frac{ب و}{أ ب}$ = $\frac{٦}{١٠}$

 = cos (٦ ÷ ١٠) shift

∴ ق(∠ب) = ٤٨ َ ٧ ً ٥٣°

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ٤٨ َ ٧ ً ٥٣°

= ١٢٦ َ ٥٢ ً ١٢°

في △ أ ب و ∵ (أ و)^2 = (أ ب)^2 − (ب و)^2

= (١٠)^2 − (٦)^2 = ٦٤ ∴ أ و = ٨ سم

∴ مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء

= $\frac{١}{٢}$ (١٠ + ٢٢) × ٨ = ١٢٨ سم^2

مثال ٣ : أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه :

أ ب = أ جـ = ١٢,٦ سم ، ق(∠جـ) = ٢٤ َ ٨٤°

أوجد : لأقرب رقم عشري واحد طول : $\overline{ب جـ}$

الحـل

العمل : نرسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ،

ويقطعه في ء



البرهان : ∵ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ،

أ ب = أ جـ ∴ ب ء = ء جـ

في △ أ ء جـ ∵ جتا جـ = $\frac{ء جـ}{أ جـ}$

∴ جتا ٢٤ َ ٨٤° = $\frac{ء جـ}{١٢,٦}$

∴ ء جـ = ١٢,٦ × جتا ٢٤ َ ٨٤° = ١,٢٣ سم

∴ ب جـ = ٢ × ١,٢٣ = ٢,٤٦ ≃ ٢,٥ سم

تمارين (٢)

(١) فى الشكل المقابل :

أب جـ مثلث ،

$\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ،

أجـ = ١٢ سم ،

ب جـ = ١٦ سم ،

ق(∠جـ) = ٣٠°

أكمل ما يأتي :

∵ جا ٣٠° = $\frac{أ ء}{......}$ ∴ أء = ...× جا ٣٠° = ... سم

∵ مساحة (Δأب جـ) = ...× أء × ب جـ

∴ مساحة (Δأب جـ) = ...×......×......

= سم٢

---

(٢) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) ظا ٤٥° = ...

($\sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ١ ، $\frac{1}{2}$)

(٢) إذا كانت جا٢س = $\frac{1}{2}$ فإن : ق(∠س) = ...

(١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٣) إذا كان : ظا٣س = $\sqrt{3}$ حيث (٣س) حادة فإن : ق(∠س) = ...

(١٠° ، ٢٠° ، ٣٠° ، ٦٠°)

(٤) إذا كان : جا(س) = $\frac{1}{2}$ ، س زاوية حادة فإن جا(٢س) = ...

(١ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$)

(٥) جا ٣٠° = جتاهـ حيث هـ قياس زاوية حادة فيكون ق(∠هـ) = ...

(٦٠° ، ٤٥° ، ١٠° ، ٣٠°)

(٦) إذا كانت : ظا $\frac{٣س}{٢}$ = ١ حيث س زاوية حادة فإن قياس زاوية س تساوى ....

(١٠° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(٧) إذا كانت : جا $\frac{س}{٢}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث س زاوية حادة فإن : جاس = ...

($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(٨) ٤جتا ٣٠° ظا ٦٠° = ...

(٣ ، ٢$\sqrt{3}$ ، ٦ ، ١٢)

(٩) ٢ظا ٤٥° − $\frac{1}{جتا ٦٠°}$ تساوى ......

(صفر ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، ١)

(١٠) ظا ٤٥° جا ٣٠° = ...

($\frac{1}{2}$ ، ١ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{4}$)

(١١) ٢جا ٣٠° جتا ٣٠° = ...

(جا ٦٠° ، جتا ٦٠° ، ظا ٦٠° ، ٢جا ٦٠°)

(١٢) جا٢ ٦٠° − جتا٢ ٦٠° = ...

(صفر ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{2}$ ، ١)

(٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) ٢جا٤٥° جتا٤٥° + ٤جا٣٠° جتا٦٠°

(٢) (جتا٢ ٦٠° + جتا٢ ٣٠° + ظا٢ ٤٥°) ÷ (جا٦٠° ظا٦٠° − جا٣٠°)

(٣) جا٤٥° جتا٤٥° + جا٣٠° جتا٦٠° − جتا٢ ٣٠°

(٤) ٢جا٤٥° جتا٤٥° + ٤جا٣٠° جتا٦٠°

(٥) جتا٦٠° جا٣٠° − جا٦٠° جتا٣٠°

---

(٤) بدون استخدام الحاسبة أثبت أن:

(١) ٩جا٣٠° − جتا٢ ٤٥° = ظا٢ ٦٠° + ظا٤٥°

(٢) جا٤٥° جتا٤٥° + جا٣٠° جتا٦٠° = جتا٢ ٣٠°

(٣) ظا٦٠° (١ − ظا٢ ٣٠°) = ٢ظا٣٠°

(٤) ظا٢ ٦٠° − ظا٢ ٤٥° = ٤جا٣٠°

(٥) ٢جتا٢ ٣٠° − ١ = جتا٦٠°

(٦) جا٢ ٣٠° = ٥جتا٢ ٦٠° − ظا٢ ٤٥°

---

(٥) أوجد قيمة س في كل مما يأتي:

(١) ٢س = جتا٦٠° جتا٢ ٤٥° + جا٣٠° جا٢ ٤٥°

(٢) ٤س = (ظا٢ ٦٠° + ظا٢ ٣٠°) ÷ (جا٤٥° × جتا٤٥°)

(٣) س جتا٣٠° = ظا٦٠°

(٤) س جا٢ ٤٥° = ظا٢ ٦٠°

(٥) ٤س = جتا٢ ٣٠° ظا٢ ٣٠° ظا٢ ٤٥°

(٦) س جا٣٠° جتا٢ ٤٥° = جتا٢ ٣٠°

(٧) س = (جا٣٠° جتا٤٥° + جتا٤٥° جتا٣٠°) ÷ (جا٤٥° جتا٦٠° + جا٤٥° جا٦٠°)

---

(٦) أوجد ق(∠هـ) التي تحقق كلاً من المعادلات الآتية حيث هـ زاوية حادة :

(١) ٢جاهـ = ظا٢ ٦٠° − ٢ظا٤٥°

(٢) جاهـ = جا٤٥° جتا٣٠° + جتا٤٥° جا٣٠°

(٣) جا٢ ٤٥° = جتاهـ ظا٣٠°

(٤) جاهـ جا٢ ٦٠° = ٣جا٢ ٤٥° جتا٢ ٤٥° جتا٦٠°

(٥) ظاهـ = ٣(جا٣٠° + جتا٣٠°) − ٤(جا٢ ٦٠° + جتا٢ ٦٠°)

(٦) ٣ظا٢ هـ = ٤جا٢ ٣٠° + ٨جتا٢ ٦٠°

---

(٧) أوجد قيمة : س حيث : ٠° < س < ٩٠° إذا كان :

جاس جا٤٥° جتا٤٥° ظا٦٠° = ظا٢ ٤٥° − جتا٢ ٦٠°

---

(٨) في الشكل المقابل :

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ

فيه أ ب = ١٠ سم ،

ب جـ = ٨ سم

أوجد قيمة :

(١) ظا ب × ظا أ   (٢) ق(∠ب)

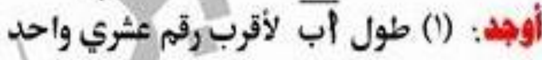
---

(٩) في الشكل المقابل :

، ق(∠جـ) = ٤٠°

ق(∠ب) = ٩٠°

أوجد: (١) طول أ ب لأقرب رقم عشري واحد



(٢) طول ب جـ لأقرب سم

---

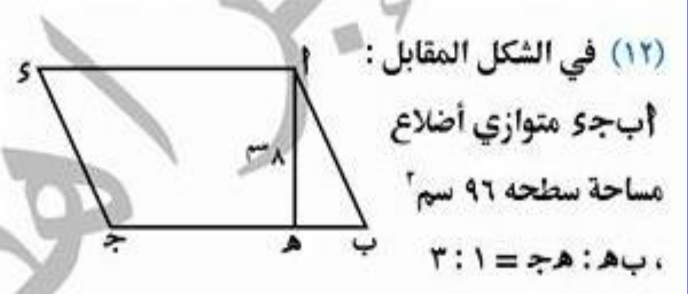
(١٠) بسبب الريح كسر الجزء العلوى لشجرة فصنع مع الأرض زاوية قياسها ٦٠° فإذا كانت نقطة تلاقى قمة الشجرة بالأرض تبعد عن قاعدة الشجرة ٤ أمتار **فأوجد** طول الشجرة لأقرب متر .

---

(١١) سُلم $\overline{أب}$ طوله ٦ أمتار يستند طرفه العلوي أ على حائط رأسي وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كانت جـ هي مسقط نقطة أ على سطح الأرض ، وكان زاوية ميل السلم على سطح الأرض ٦٠° **فأوجد** طول $\overline{أجـ}$

---

(١٢) في الشكل المقابل :



أبجء متوازي أضلاع

مساحة سطحه ٩٦ سم٢

، بهـ : هـجـ = ١ : ٣

، $\overline{أهـ} \perp \overline{بجـ}$ ، أهـ = ٨ سم

أوجد :

أولاً : طول $\overline{أء}$ ثانياً : ق($\angle$ ب)

ثالثاً : طول $\overline{أب}$ لأقرب رقم عشري واحد .

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

(السويس ٢٠١٨)

(١) إذا كان : جا٢س = $\frac{١}{٢}$ فإن : ق($\angle$س) = ...

(١٥° ، ٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠°)

(البحر الأحمر ٢٠١٨)

(٢) إذا كان : جاس = $\frac{١}{٢}$ حيث س زاوية حادة فإن :

ق($\angle$س) = ...

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ١٨٠°)

(٣) ظا٤٥° جا٦٠° = ...

(١ ، $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{١}{٢}$)

(القليوبية ٢٠١٨)

(٤) إذا كان : جا٧٠° = جتاس حيث س قياس زاوية حادة فإن : س = ...

(٦٠° ، ٤٥° ، ١٠° ، ٢٠°)

(الدقهلية ٢٠١٨)

(٥) إذا كانت س زاوية حادة ، ٢جاس − ١ = ٠ فإن :

ق($\angle$س) = ...

(٦٠° ، ٩٠° ، ٤٥° ، ٣٠°)

(٦) أبجـ مثلث فيه ق($\angle$ب) = ٩٠° ، ٣ظاجـ − ٤ = ٠

فإن : ٢جاجـ جتاجـ = ...

(٣ ، ٤ ، ٢٥ ، ١٢)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٧) إذا كان : ظا٣س = ١ حيث $\angle$٣س حادة فإن :

ق($\angle$س) = ...

(٤٥° ، ١٥° ، ٦٠° ، ٢٠°)

(الغربية ٢٠١٨)

(٨) إذا كان : جاس = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : جا٢س = ...

(١ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

(الشرقية ٢٠١٨)

(٩) إذا كان : ظا(س + ٢٠°) = $\sqrt{3}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن س = ...

(٢٠° ، ٣٠° ، ٤٠° ، ٥٠°)

(١٠) في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في أ يكون جيب تمام الزاوية ب : جيب الزاوية جـ = ...

($\frac{3}{5}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{4}$ ، ١)

(البحيرة ٢٠١٨)

(١١) س ، ص زاويتان متتامتان فإذا كانت جاس = $\frac{3}{5}$ فإن : جتاص = ...

($\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{5}{3}$)

(الفيوم ٢٠١٨)

(١٢) إذا كان : جتا $\frac{س}{2}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث س قياس زاوية حادة فإن : س = ...

(١٥° ، ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠°)

(الأزهر ٢٠١٨)

(١٣) إذا كان : جاس = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن : س = ...

(٣٠° ، ٤٥° ، ٦٠° ، ٩٠°)

(المنيا ٢٠١٨)

(١٤) قيمة المقدار : ٤جا٣٠° جتا٦٠° = ...

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

(شمال سيناء ٢٠١٨)

(١٥) ٢جا٣٠° ظا٦٠° = ...

($\sqrt{3}$ ، ٣ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{1}{2}$)

---

(٢) بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد القيمة العددية لكل من المقادير الآتية :

(١) ظا²٦٠° − ظا²٤٥° − ٤جا٣٠°

(القليوبية ٢٠١٨)

(٢) جا٤٥° جتا٤٥° − ظا٦٠° جتا٣٠°

(الشرقية ٢٠١٨)

---

(٣) بدون استخدام الحاسبة برهن أن :-

(١) جتا²٣٠° − جا²٣٠° = جتا٦٠°

(المنيا ٢٠١٨)

(٢) ٥جتا٦٠° − ظا²٤٥° = ٣جا٣٠°

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

(٣) جا²٣٠° = ٥جتا²٦٠° − ظا²٤٥°

(البحيرة ٢٠١٨)

(٤) ظا²٦٠° = ٤جا٣٠° + ظا٤٥°

(الغربية ٢٠١٨)

(٥) ظا²٦٠° − ظا²٤٥° = جا²٦٠° + جتا²٦٠° + ٢جا٣٠°

(الإسكندرية ٢٠١٨)

(٦) جتا٦٠° = ٢جتا²٣٠° − ظا٤٥°

(البحر الأحمر ٢٠١٨)

(٤) **بدون استخدام الحاسبة أوجد ق(∠س) حيث س زاوية حادة في كل مما يأتي :-**

(١) ظاس = ٤جا ٣٠° جتا ٦٠°

(البحر الأحمر ٢٠١٨)

(٢) جتاس = (جا ٦٠° جا ٣٠°) / (ظا ٤٥° جا^2 ٤٥°)

(الدقهلية ٢٠١٨)

(٣) جاس ظا ٣٠° = جتا^2 ٤٥°

(أسوان ٢٠١٨)

(٤) ظاس = جا^2 ٦٠° + جتا^2 ٦٠°

(الغربية ٢٠١٨)

(٥) ٢جتاس = ٤جا^2 ٦٠° − ٢ظا^2 ٤٥°

(المنيا ٢٠١٨)

---

(٥) **بدون استخدام الحاسبة أوجد ق(∠هـ) حيث هـ زاوية حادة في كل مما يأتي :-**

(١) جتا ٦٠° + ٢جاهـ = جا^2 ٤٥° + ٢جا ٣٠°

(الشرقية ٢٠١٨)

(٢) جتاهـ ظا ٣٠° = جتا^2 ٤٥°

(سوهاج ٢٠١٨)

(٣) جاهـ = جا ٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠°

(الإسكندرية ٢٠١٨)

---

(٦) أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه :

أ ب = أ جـ = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم

، أ ء ⊥ ب جـ **أوجد** :

(١) ق(∠ب) (٢) مساحة سطح المثلث أ ب جـ

(القليوبية ٢٠١٨)

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب وكان

٢أ ب = $\sqrt{3}$ أ جـ **أوجد** :

(١) النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

(٢) ق(∠أ)

(الدقهلية ٢٠١٨)

---

(٨) أ ب جـ Δ قائم الزاوية في جـ ، أ جـ = ٥ سم ،

ب جـ = ١٢ سم **أوجد** :

أولاً : جا^2 أ + جتا^2 ب ثانياً : ق(∠أ)

(المنيا ٢٠١٨)

---

(٩) في الشكل المقابل :

ق(∠ء) = ٣٠°

، ق(∠أ جـ ء) = ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°

، ب جـ = ٣ سم ، جـ ء = ٨ سم

أوجد : (١) ظاب

(٢) احسب قياس ∠ب أ ء

(الشرقية ٢٠١٨)

---

(١٠) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب

(١) **أثبت** أن : جا^2 أ + جتا^2 أ = ١

(٢) إذا كان : أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ١٣ سم

أوجد : ق(∠جـ)

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

اختبار الوحدة الرابعة

س١ : اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :ـ

(أسوان ٢٠١٨)

(١) ٢جا٣٠° جتا٦٠° ظا٤٥° = ...

($\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{1}{3}$)

(السويس ٢٠١٨)

(٢) في Δأب جـ إذا كان أب = ٨ سم ،

ب جـ = ١٠ سم ، أجـ = ٧ سم فإن : ∠أ تكون ....

(حادة ، قائمة ، منفرجة ، منعكسة)

(الغربية ٢٠١٨)

(٣) ظا٣٠° = ...

($\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ، $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٤) مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ...

(٣٦٠° ، ١٨٠° ، ٢٧٠° ، ٩٠°)

(قنا ٢٠١٨)

(٥) إذا كانت ٤جتا٦٠° جا٣٠° =ظاس فإن قيمة

س = ... ° حيث س زاوية حادة

(٤٥ ، ٣٠ ، ٦٠ ، ٨٠)

(الجيزة ٢٠١٨)

(٦) إذا كانت ظاس = ١ حيث س زاوية حادة فإن :

ق(∠س) = ... °

(٤٥ ، ٣٠ ، ٩٠ ، ٦٠)

س٢ : إذا كانت ٤جتا٦٠° جا٣٠° =ظاس **أوجد** : قياس الزاوية الحادة س

(دمياط ٢٠١٨)

س٣ : أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فإذا كان :

$\frac{أب}{أجـ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **أوجد** : النسب المثلثية الأساسية للزاوية جـ

(شمال سيناء ٢٠١٨)

س٤ : أب جـ مثلث متساوي الساقين فيه :

أب = أجـ = ١٠ سم ، ب جـ = ١٢ سم

أوجد :

(١) ق(∠ب)

(٢) مساحة سطح Δأب جـ

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

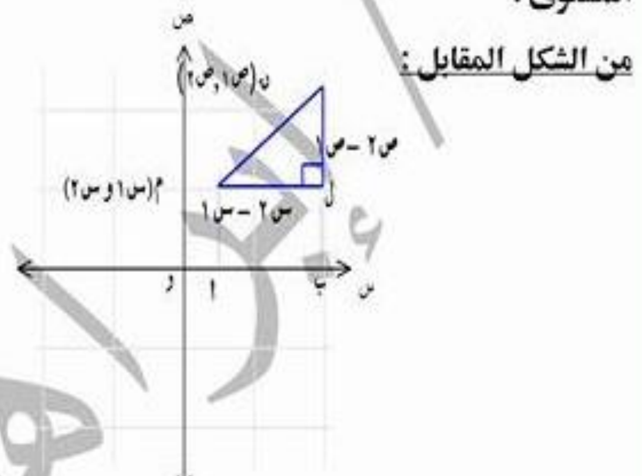
س٥ : **أثبت** أن : جا٦٠° = ٢جا٣٠° جتا٣٠°

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

الوحدة الخامسة : الهندسة التحليلية

نفرض أن : م (س١ ، ص١) ، ن (س٢ ، ص٢) نقطتان في المستوى :

من الشكل المقابل :



ن ل = ن ب − ل ب = ص٢ − ص١ ⟸ (١)

بالمثل : ل م = ب و − أ و = س٢ − س١ ⟸ (٢)

∵ Δ م ن ل قائم الزاوية في ل

∴ (م ن)² = (س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)²

∴ م ن = √((س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)²)

أي أن : البعد بين نقطتين =

√(مربع فرق السينات + مربع فرق الصادات)

مثال ١ : **أوجد** البعد بين النقطتين م(٢ ، ٣) ، ن(٨ ، ١٢) الواقعتين في مستوى إحداثي متعامد .

الحل

∵ م ن = √((س٢ − س١)² + (ص٢ − ص١)²)

∴ م ن = √((٨ − ٢)² + (١٢ − ٣)²)

∴ م ن = √(٦² + ٩²) = √(٣٦ + ٨١) = ٣ √١٣ وحدة طول

ملاحظات هاااامة جداًااا :

خد بالك من القوانين اللى جايه عشان مهمة

(١) إذا تساوت السينات في الزوجين المرتين فإن :

م ن = |ص٢ − ص١|

(٢) إذا تساوت الصادات فى الزوجين المرتبين فإن :

م ن = |س٢ − س١|

(٣) البعد بين أي نقطة ونقطة الأصل (٠ ، ٠) هو

م ن = √(س² + ص²)

مثال ٢ : **أوجد** البعد بين النقطة م (١ ، ٤) ونقطة الأصل

الحل

∵ نقطة الأصل و = (٠ ، ٠) ∴ م و = √(س² + ص²)

م و = √(١² + ٤²) = √(١ + ١٦) = √١٧ وحدة طول

تدريب١ : أوجد البعد بين النقطتين فيما يلي :

(١) م (١ ، −٣) ، ن (٤ ، ١)

(٢) أ (١ ، −٤) ، ب (١ ، ٧)

(٣) ن (−٣ ، ٤) ، و (٠ ، ٠)

الحل

(١) ....

(٢) ....

(٣) ....

تطبيقات على البعد بين نقطتين :

(١) لإثبات أن أي ثلاث نقاط تقع على استقامة واحدة نوجد البعد بين كل نقطتين ثم نثبت أن البعد الأكبر يساوي مجموع البعدين الآخرين

مثال ٣ : **أثبت** أن النقط : أ(٣ ، ٤) ، ب(٥ ، ٣) ، ج(٧ ، ٢) تقع على استقامة واحدة .

الحل

∵ أب $= \sqrt{(٥-٣)^{٢} + (٣-٤)^{٢}}$

$= \sqrt{(٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$ وحدة طول .

، ب ج $= \sqrt{(٧-٥)^{٢} + (٢-٣)^{٢}} =$

$\sqrt{(٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٤+١} = \sqrt{٥}$ وحدة طول .

، أج $= \sqrt{(٧-٣)^{٢} + (٢-٤)^{٢}} =$

$\sqrt{(٤)^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{١٦+٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول

∵ أب + ب ج $= \sqrt{٥} + \sqrt{٥} = ٢\sqrt{٥} =$ أج

∴ أ ، ب ، ج تقع على استقامة واحدة .

---

(٢) لإثبات أن النقط : أ ، ب ، ج هي رؤوس مثلث نوجد أب ، ب ج ، أج ثم نثبت أن مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث .

(أ) لتحديد نوع المثلث من حيث الأضلاع نوجد أب ، ب ج ، أج

* فإذا كانت أب = ب ج = أج كان المثلث متساوي الأضلاع .

* أما إذا كانت أب = ب ج ≠ أج أو يكون فيه ضلعان فقط متساويان يكون المثلث متساوي الساقين .

مثال ٤ : **أثبت** أن المثلث الذى رؤوسه النقط : أ(١ ، −٢) ، ب(−٤ ، ٢) ، ج (١ ، ٦) متساوي الساقين

الحل

∵ أب $= \sqrt{(-٤-١)^{٢} + (٢-(-٢))^{٢}}$

$= \sqrt{(-٥)^{٢} + (٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥+١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول

، ب ج $= \sqrt{(١-(-٤))^{٢} + (٦-٢)^{٢}} =$

$\sqrt{(٥)^{٢} + (٤)^{٢}} = \sqrt{٢٥+١٦} = \sqrt{٤١}$ وحدة طول .

∵ أب = ب ج $= \sqrt{٤١}$

∴ أ ، ب ، ج هي رؤوس مثلث متساوي الساقين .

(ب) لتعيين نوع المثلث بالنسبة لزواياه :

(١) إذا كانت $(\text{أج})^{٢} > (\text{أب})^{٢} + (\text{ب ج})^{٢}$ فإن :

Δ منفرج الزاوية في ب أكبر من منفرج

(٢) إذا كانت $(\text{أج})^{٢} = (\text{أب})^{٢} + (\text{ب ج})^{٢}$ فإن :

Δ قائم الزاوية في ب يساوي قائم

(٣) إذا كانت $(\text{أج})^{٢} < (\text{أب})^{٢} + (\text{ب ج})^{٢}$ فإن :

Δ حاد الزوايا أصغر من حاد

مثال ٥ : **أثبت** أن النقط : أ(٧ ، ٠) ، ب(٧ ، ٦) ، ج (−١ ، ٦) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية ، واحسب مساحته .

الحل

∵ أب $= \sqrt{(٧-٧)^{٢} + (٦-٠)^{٢}}$

$= \sqrt{٠+٣٦} = \sqrt{٣٦} = ٦$ وحدة طول

، ب ج $= \sqrt{(-١-٧)^{٢} + (٦-٦)^{٢}} = \sqrt{٦٤} = ٨$ وحدة طول

، أجـ = $\sqrt{(٧+١)^٢ + (٠-٦)^٢}$ =

$\sqrt{٦٤+٣٦}$ = $\sqrt{١٠٠}$ = ١٠ وحدة طول

∵ (أجـ)^٢ = ١٠٠ ،

(أب)^٢ + (بجـ)^٢ = ٣٦+٦٤=١٠٠

∴ (أجـ)^٢ = (أب)^٢ + (بجـ)^٢

∴ المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب

∴ مساحته = $\frac{١}{٢}$ × أب × بجـ

= $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٨ = ٢٤ وحدة مربعة .

---

(٣) لإثبات أن النقاط أ ، ب ، جـ الواقعة في مستوى إحداثي متعامد تقع على محيط دائرة مركزها م نوجد م أ ، م ب ، م جـ ثم نثبت أن : م أ = م ب = م جـ

إن كنت ناسي أفكرك :

محيط الدائرة = ٢ π نق ،

مساحة الدائرة = π نق^٢

مثال ٦ : أثبت أن النقط :

أ (٣ ، –١)، ب (–٤ ، ٦)، جـ (٢ ، –٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م (–١ ، ٢)، ثم **أوجد** محيط الدائرة .

الحـــل

∵ م أ = $\sqrt{(-١-٣)^٢ + (٢-(-١))^٢}$

= $\sqrt{(-٤)^٢ + (٣)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول .

، م ب = $\sqrt{(-١-(-٤))^٢ + (٢-٦)^٢}$ =

$\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول .

، م جـ = $\sqrt{(-١-٢)^٢ + (٢-(-٢))^٢}$ =

$\sqrt{(-٣)^٢ + (٤)^٢}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدة طول .

∵ م أ = م ب = م جـ = ٥ ∴ أ ، ب ، جـ تقع على دائرة مركزها م .

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

= ٢ π × ٥ = ١٠ π وحدة طول .

---

(٤) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء هي رؤوس شكل رباعي – لإثبات

(أ) الشكل متوازي أضلاع – نثبت أن : أب = جـء ، بجـ = أء

أي أن كل ضلعان متقابلان متساويان في الطول

(ب) الشكل معين – نثبت أن : أب = بجـ = جـء = أء

أي أن : جميع أضلاعه متساوية

(جـ) الشكل مستطيل – نثبت أن : أب = جـء ، بجـ = أء ، أجـ = ب ء

أي أن : كل ضلعان متقابلان متساويان في الطول والقطران متساويان في الطول

(ء) الشكل مربع – نثبت أن : أب = بجـ = جـء = أء ، أجـ = ب ء

أي أن : جميع أضلاعه متساوية والقطران متساويان في الطول .

مثال ٧ : **أثبت** أن الشكل الرباعي الذى رؤوسه النقط أ(٣، ٢)، ب(٠، ٥)، جـ(−٣، ٢)، ء(٠، −١) يكون مربعاً .

الحل

∵ أب = $\sqrt{(٠-٣)^٢+(٥-٢)^٢}$

= $\sqrt{(-٣)^٢+(٣)^٢}$ = $\sqrt{١٨}$ وحدة طول .

أجـ = $\sqrt{(-٣-٠)^٢+(٢-٥)^٢}$

= $\sqrt{(-٣)^٢+(-٣)^٢}$ = $\sqrt{١٨}$ وحدة طول

جـء = $\sqrt{(٠-(-٣))^٢+(-١-٢)^٢}$

= $\sqrt{(٣)^٢+(-٣)^٢}$ = $\sqrt{١٨}$ وحدة طول .

أء = $\sqrt{(٠-٣)^٢+(-١-٢)^٢}$

= $\sqrt{(-٣)^٢+(-٣)^٢}$ = $\sqrt{١٨}$ وحدة طول

∵ أب = بجـ = جـء = أء

∴ جميع أضلاعه متساوية ولإثبات أنه مربع نوجد طولي القطرين أجـ ، بء

أجـ = $\sqrt{(-٣-٣)^٢+(٢-٢)^٢}$ =

$\sqrt{(-٦)^٢+٠}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدة طول .

بء = $\sqrt{(-١-٥)^٢}$ = $\sqrt{(-٦)^٢}$ = $\sqrt{٣٦}$ = ٦ وحدة طول .

∵ أجـ = بء = ٦ وأضلاع الشكل أبجـء متساوية في الطول ∴ الشكل أبجـء مربع .

(٥) لإيجاد المجهول في قانون البعد نتبع الأمثلة التالية للتوضيح :

مثال ٨ : إذا كان بعد النقطة (س ، ٥) عن النقطة (٦ ، ١) يساوي ٢ $\sqrt{٥}$ **فاحسب** قيمة س .

الحل

∵ $\sqrt{(س-٦)^٢+(٥-١)^٢}$ = ٢ $\sqrt{٥}$

∴ $\sqrt{(س-٦)^٢+١٦}$ = ٢ $\sqrt{٥}$ بتربيع الطرفين

$(س-٦)^٢+١٦=٢٠$

∴ $(س-٦)^٢=٤$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ س − ٦ = ±٢

∴ س = ٨ أو س = ٤

مثال ٩ : إذا كانت أ (س ، ٢)، ب (٣، ٢)، جـ (٥ ، ١) وكانت أب = بجـ **فأوجد** قيمة س

الحل

∵ أب = بجـ

∴ $\sqrt{(س-٣)^٢+(٣-٢)^٢}$ = $\sqrt{(٣-٥)^٢+(٢-١)^٢}$

∴ $\sqrt{(س-٣)^٢+١}$ = $\sqrt{٤+١}$

∴ $\sqrt{(س-٣)^٢+١}$ = $\sqrt{٥}$ بتربيع الطرفين

∴ $(س-٣)^٢+١=٥$

⇐ $(س-٣)^٢=٤$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

∴ س − ٣ = ±٢

∴ س = ٥ أو س = ١

تمارين (١)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(١) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين :
(٠ ، ٠) ، (٥ ، ١٢) يساوي .... وحدة طول
(٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٣)

(٢) دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات طول فالنقطة .... تنتمي إليها
((١ ، ٢) ، (–٢ ، $\sqrt{5}$) ، ($\sqrt{3}$ ، ١) ، ($\sqrt{2}$ ، ١))

(٣) البعد العمودي بين المستقيمين :
ص – ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ يساوي .... وحدة طول
(١ ، ٢ ، ٣ ، ٥)

(٤) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ١) هو وحدة الطول فإن أ = ...
(–١ ، صفر ، ١ ، ± ١)

---

(٢) أثبت أن المثلث الذى رؤوسه النقط
أ (٥ ، –٥) ، ب (–١ ، ٧) ، جـ (١٥ ، ١٥) قائم الزاوية في ب ثم احسب مساحته .

---

(٣) بين نوع المثلث الذى رؤوسه النقط أ (–٢ ، ٤) ، ب (٣ ، –١) ، جـ (٤ ، ٥) من حيث أضلاعه ؟

---

(٤) أثبت أن النقط (٥ ، ٣) ، (٦ ، –٢) ، (١ ، –١) ، (٠ ، ٤) هي رؤوس معين ثم احسب مساحته .

---

(٥) أوجد قيمة أ في كل من الحالات الآتية :

(١) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (–٢ ، ٣) يساوي ٥

(٢) إذا كان البعد بين النقطتين (أ ، ٧) ، (٣أ – ١ ، –٥) يساوي ١٣

---

(٦) أثبت أن النقط أ (–٢ ، ٥) ، ب (٣ ، ٣) ، جـ (–٤ ، ٢) ليست على استقامة واحدة ، وإذا كانت ء (–٩ ، ٤) فأثبت أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

---

(٧) أ ب جـ ء شكل رباعي حيث : أ(٢ ، ٤) ، ب(–٣ ، ٠) ، جـ (–٧ ، ٥) ، ء(–٢ ، ٩) أثبت أن : الشكل أ ب جـ ء مربع .

---

(٨) أثبت أن النقطتين : أ(٣ ، –١) ، ب(–٤ ، ٦) تقعان على دائرة مركزها النقطة م(–١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة .

---

(٩) إذا كانت أ(٢ ، س) ، ب(٣ ، –١) ، وكانت : أ ب = $\sqrt{17}$ فأوجد : قيمة س .

---

(١٠) أثبت أن النقط : أ(صفر ، ٢) ، ب(١ ، ١) ، جـ (٢ ، صفر) تقع على استقامة واحدة

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(سوهاج ٢٠١٨)

(١) البعد بين النقطتين : ($\sqrt{٢}$ ، ١) ونقطة الأصل يساوي .... وحدة طول

(١ ، ٢ ، ٣ ، ٤)

(قنا ٢٠١٨)

(٢) البعد العمودي بين المستقيمين :

س − ٢ = ٠ ، س + ٣ = ٠ يساوي ....

(٣ ، ٢ ، ٥ ، ١)

(دمياط ٢٠١٨)

(٣) بُعد النقطة (ل ، −٤) عن محور الصادات يساوي ....

(|ل| ، −٤ ، ل ، ٤)

(شمال سيناء ٢٠١٨)

(٤) البعد بين النقطتين : (٣ ، ٠) ، (٠ ، −٤) يساوي ......

(٧ ، ٦ ، ٥ ، ٤)

(الشرقية ٢٠١٨)

(٥) طول نصف قطر الدائرة التي مركزها (−٢ ، ٣) وتمر بالنقطة (٢ ، −١) يساوي .... وحدة طول .

(٣ ، ٢ ، ٤$\sqrt{٢}$ ، ٥)

(الأزهر ٢٠١٨)

(٦) طول القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين :

(٢ ، ٠) ، (٧ ، ١٢) يساوي .... وحدة طول .

(١٣ ، ١٢ ، ٥ ، ٧)

(السويس ٢٠١٨)

(٧) البعد بين النقطتين (٢ ، ٣) ونقطة الأصل = ...

($\sqrt{١٣}$ ، $\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٧}$ ، $\sqrt{٥}$)

(٢) أثبت أن النقط : أ(٣ ، −١) ، ب(−٤ ، ٦) ، ج(٢ ، −٢) تقع على دائرة مركزها النقطة م(−١ ، ٢) ثم أوجد محيط الدائرة .

(القليوبية ٢٠١٨)

---

(٣) أثبت أن : المثلث الذي رؤوسه أ(٠ ، ٠) ، ب(٤ ، ٠) ، ج(٤ ، ٣) مثلث قائم الزاوية في ب وأوجد مساحته .

(المنيا ٢٠١٨)

---

(٤) أ ب ج ∆ حيث أ(١ ، ١) ، ب(٣ ، ١) ، ج(١ ، ٣)

أثبت أن : ∆ أ ب ج متساوي الساقين – وأوجد مساحة سطحه

(الشرقية ٢٠١٨)

---

(٥) في الشكل المقابل :

أ ∈ لمحور السينات

، أ و = أ ب

حيث و نقطة الأصل

أوجد طول $\overline{أب}$

حيث ب(−٩ ، ١٥)

(الدقهلية ٢٠١٨)

---

(٦) إذا كان البعد بين النقطتين : (أ ، ٧) ، (−٢ ، ٣) يساوي ٥ وحدة طول . أوجد قيمة أ

(الإسكندرية ٢٠١٨)

---

(٧) إذا كانت النقطة أ(٥ ، ٢) تقع على دائرة مركزها م (١ ، −١) فأوجد طول قطر هذه الدائرة .

(الجيزة ٢٠١٨)

الدرس الثاني
إحداثيا منتصف قطعة مستقيمة

نقطة منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث

أ$(\text{س}_1 ، \text{ص}_1)$ ، ب$(\text{س}_2 ، \text{ص}_2)$

لإيجاد نقطة المنتصف :

$$\left(\frac{\text{مجموع السينات}}{\text{٢}} ، \frac{\text{مجموع الصادات}}{\text{٢}}\right)$$

$$\therefore \text{منتصف } \overline{\text{أب}} = \left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{\text{٢}} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{\text{٢}}\right)$$

مثال ١ : أوجد إحداثيي م منتصف $\overline{\text{أب}}$ حيث أ(٢ ، −٥) ، ب(−٦ ، ١)

الحل

$$\text{م} = \left(\frac{\text{٢}+(-\text{٦})}{\text{٢}} ، \frac{-\text{٥}+\text{١}}{\text{٢}}\right) = (-\text{٢} ، -\text{٢})$$

ملاحظة هامة : خذ بالك :

طبعاً لو أعطاني المنتصف وطلب مني أي نقطة من الأطراف ممكن استخدم القانون اللي فوق

وممكن استخدم العلاقة ٢م = أ+ب على فرض أن منتصف $\overline{\text{أب}}$ هو م .

مثال ٢ : أوجد قيمة كل من س ، ص إذا كانت النقطة (٣ ، −٢) منتصف القطعة المستقيمة المرسومة بين النقطتين (س ، ٢) ، (٣ ، ص) .

الحل

$$\because \text{م} = \left(\frac{\text{س}_1+\text{س}_2}{\text{٢}} ، \frac{\text{ص}_1+\text{ص}_2}{\text{٢}}\right)$$

$$\therefore (\text{٣} ، -\text{٢}) = \left(\frac{\text{س}+\text{٣}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٢}+\text{ص}}{\text{٢}}\right)$$

$\therefore \frac{\text{س}+\text{٣}}{\text{٢}} = \text{٣}$ | $\frac{\text{٢}+\text{ص}}{\text{٢}} = -\text{٢}$

$\therefore \text{س}+\text{٣} = \text{٦}$ | $\text{٢}+\text{ص} = -\text{٤}$

$\therefore \text{س} = \text{٣}$ | $\therefore \text{ص} = -\text{٦}$

حل آخر : نفرض أن : م منتصف $\overline{\text{أب}}$ ∴ ٢م = أ+ب

٢ × (٣ ، −٢) = (س ، ٢) + (٣ ، ص)

∴ (٦ ، −٤) = (س ، ٢) + (٣ ، ص)

$\therefore \text{س}+\text{٣} = \text{٦}$ | $\text{٢}+\text{ص} = -\text{٤}$

$\therefore \text{س} = \text{٣}$ | $\therefore \text{ص} = -\text{٦}$

تدريب ١ : إذا كانت جـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ **فأوجد** :

س ، ص في كل من الحالات الآتية :

أولاً أ(١ ، ٥) ، ب(٣ ، ٧) ، جـ(س ، ص)

....

ثانياً : أ(−٣ ، ص) ، ب(٩ ، ١١) ، جـ(س ، −٣)

....

تطبيقات على إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

مثال ٣ : أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه : أ(٢ ، ٣)، ب(٥ ، ١)، جـ(٧ ، ٥)، ء(س ، ص) **أوجد** إحداثيي الرأس ء

الحل

∵ قطري متوازي الأضلاع ينصف كلاً منهما الآخر .

∴ نقطة منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ هي نفس نقطة منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\left(\frac{٢+٧}{٢} ، \frac{٣+٥}{٢}\right) = \left(\frac{٥+\text{س}}{٢} ، \frac{١+\text{ص}}{٢}\right)$

∴ ٥ + س = ٩ | ١ + ص = ٨

∴ س = ٤ | ∴ ص = ٧

∴ ء(٤ ، ٧)

مثال ٤ : إذا كانت : أ(−١ ، −١)، ب(٢ ، ٣)، جـ(٦ ، ٠)، ء(٣ ، −٤) أربع نقط في مستوى إحداثي متعامد . **أثبت** أن : $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر .

الحل

منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = $\left(\frac{−١+٦}{٢} ، \frac{−١+٠}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{−١}{٢}\right)$

منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ = $\left(\frac{٣+٢}{٢} ، \frac{−٤+٣}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{٢} ، \frac{−١}{٢}\right)$

∵ منتصف $\overline{\text{أجـ}}$ = منتصف $\overline{\text{ب ء}}$

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كل منهما الآخر .

مثال ٥ : **أثبت** أن النقط أ(٦ ، ٠)، ب(٢ ، −٤)، جـ(−٤ ، ٢)هي رؤوس مثلث قائم الزاوية في ب، ثم **أوجد** احداثيي نقطة ء التي تجعل الشكل أ ب جـ ء مستطيل .

الحل

∵ أب = $\sqrt{(٢−٦)^٢ + (−٤−٠)^٢}$

= $\sqrt{(−٤)^٢ + (−٤)^٢}$ = $\sqrt{٣٢}$ وحدة طول .

ب جـ = $\sqrt{(−٤−٢)^٢ + (٢+٤)^٢}$

= $\sqrt{(−٦)^٢ + (٦)^٢}$ = $\sqrt{٧٢}$ وحدة طول .

أجـ = $\sqrt{(−٤−٦)^٢ + (٢−٠)^٢}$

= $\sqrt{(−١٠)^٢ + (٢)^٢}$ = $\sqrt{١٠٤}$ وحدة طول .

∵ $(\text{أجـ})^٢ = ١٠٤$ ،

$(\text{أب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢ = ٣٢ + ٧٢ = ١٠٤$

∴ $(\text{أجـ})^٢ = (\text{أب})^٢ + (\text{ب جـ})^٢$

∴ Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب

نفرض أن النقطة هـ هي منتصف $\overline{\text{أجـ}}$

∴ هـ = $\left(\frac{−٤+٦}{٢} ، \frac{٢+٠}{٢}\right) = (١ ، ١)$

في المستطيل القطران ينصف كلاً الآخر .

∴ هـ منتصف $\overline{\text{ب ء}}$ وبفرض أن ء :(س ، ص)

∴ (١ ، ١) = $\left(\frac{\text{س}+٢}{٢} ، \frac{\text{ص}−٤}{٢}\right)$

∴ $\frac{\text{س}+٢}{٢} = ١$ | $\frac{\text{ص}−٤}{٢} = ١$

∴ س + ٢ = ٢ | ص − ٤ = ٢

∴ س = ٠ | ∴ ص = ٦

∴ ء(٠ ، ٦)

تمارين (٢)

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين:

(١) إذا كانت أ(١ ، ٢) ، ب(٣ ، ٤) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي ....

((٣ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٦) ، (١ ، ٤))

(٢) إذا كان $\overline{أب}$ قطر في الدائرة حيث أ(٣ ، −٥) ، ب(٥ ، ١) فإن مركز الدائرة هو ....

((٤ ، −٢) ، (٤ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٨ ، −٢))

(٣) النقطة (٠ ، ٤) تنصف البعد بين النقطتين: (−١ ، −١) ، (س ، ص) فإن النقطة (س ، ص) هي ......

((١ ، ٩) ، (−١ ، ٩) ، ($-\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$) ، (−١ ، ٣))

---

(٢) أب جـ د متوازي أضلاع تقاطع قطراه في هـ حيث أ(٣ ، −١) ، ب(٦ ، ٢) ، جـ(١ ، ٧) أوجد:

أولاً: إحداثيي كل من هـ ، د

ثانياً: طول $\overline{هـ د}$

---

(٣) $\overline{أب}$ قطر في الدائرة التي مركزها م فإذا كانت: ب(٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) فأوجد:

أولاً: إحداثيي أ

ثانياً: طول نصف قطر الدائرة

---

(٤) إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ فأوجد: س ، ص في كل من الحالات الآتية:

أولاً: أ(س ، −٦) ، ب(٩ ، −١١) ، جـ(−٣ ، ص) .

ثانياً: أ(س ، ٣) ، ب(٦ ، ص) ، جـ(٤ ، ٦) .

(٥) أب جـ د متوازي أضلاع فيه: أ(س ، ٢) ، ب(٣ ، ٨) ، جـ(٩ ، ١٠) ، د(٧ ، ٤) أوجد: س .

---

(٦) إذا كانت أ(١ ، −٦) ، ب(٩ ، ٢) فأوجد: إحداثيات النقط التي تقسم $\overline{أب}$ إلى أربعة أجزاء متساوية في الطول .

---

(٧) أب جـ د متوازي أضلاع فيه أ(٣ ، ٤) ، ب(٢ ، −١) ، جـ(−٤ ، −٣) ، أوجد إحداثي د . ثم أوجد إحداثي هـ بحيث يصبح الشكل أب جـ هـ شبه منحرف فيه $\overline{أهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أهـ = ٢ب جـ

---

(٨) أثبت أن النقط: أ(−٣ ، ٠) ، ب(٣ ، ٤) ، جـ(١ ، −٦) هي رؤوس مثلث متساوي الساقين رأسه أ ، ثم أوجد طول القطعة المستقيمة المرسومة من أ وعمودية على $\overline{ب جـ}$.

---

(٩) أثبت أن النقط: أ(٥ ، ٣) ، ب(٣ ، −٢) ، جـ(−٢ ، −٤) هي رؤوس مثلث منفرج الزاوية في ب ، ثم أوجد إحداثيي نقطة د التي تجعل الشكل أ ب جـ د معيناً وأوجد مساحة سطحه .

---

(١٠) إذا كانت النقط: أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، −٣) ، جـ(−١ ، −٢) ، د(−٢ ، ٣) هي رؤوس معين فأوجد:

(أ) إحداثيي نقطة تقاطع القطرين .

(ب) مساحة المعين أ ب جـ د

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :

(الإسكندرية ٢٠١٨)

(١) إذا كانت أ(٥ ، ٧) ، ب(١ ، –١) إحداثي نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي ....

((٢ ، ٣) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٤))

(البحر الأحمر ٢٠١٨)

(٢) إذا كانت أ(٣ ، –٤) ، ب(٥ ، –٢) ، جـ منتصف $\overline{أب}$ فإن إحداثي جـ = ...

((٨ ، –٦) ، (١ ، ١) ، (٤ ، –٣) ، (–١ ، –١))

(الدقهلية ٢٠١٨)

(٣) إذا كانت (٢ ، –١) هي منتصف القطعة المستقيمة التي طرفاها (س ، ٢) ، (٨ ، ص) فإن : س + ص = ...

(صفر ، ٤ ، –٤ ، –٨)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٤) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ(٣ ، –٤) فإن إحداثي النقطة ب هي ....

((–٣ ، –٤) ، (–٤ ، ٣) ، (–٣ ، ٤) ، (٤ ، ٣))

(الشرقية ٢٠١٨)

(٥) إذا كانت أ(–٢ ، ٥) ، ب(٤ ، ٣) فإن نقطة منتصف $\overline{أب}$ هي ....

((١ ، ٤) ، (–٣ ، –٤) ، (٣ ، –٤) ، (–٣ ، ٤))

(قنا ٢٠١٨)

(٦) إذا كانت جـ(–٣ ، ٤) منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(س ، –٦) ، ب(١ ، –٨) فإن : س + ص = ...

(–١١ ، ١١ ، –١٨ ، –٢٤)

(المنيا ٢٠١٨)

(٧) أ ب جـ ء ، أ(٣ ، ٤) ، جـ(٥ ، ٦) فإن إحداثيي نقطة تقاطع قطريه = ...

((٨ ، ١٠) ، (١٠ ، ٨) ، (٤ ، ٥) ، (١٥ ، ٢٤))

(الفيوم ٢٠١٨)

(٨) إذا كان $\overline{أب}$ قطر في دائرة حيث أ(٣ ، –٥) ، ب(٥ ، ١) فإن مركز الدائرة هو ....

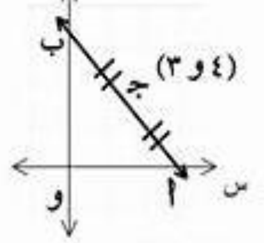
((٤ ، –٢) ، (٤ ، ٢) ، (٢ ، –٢) ، (٨ ، –٢))

(سوهاج ٢٠١٨)

(٩) في الشكل المقابل :

جـ منتصف $\overline{أب}$

، جـ(٤ ، ٣)



فإن مساحة Δ أ و ب = ... وحدة مربعة

(٢٤ ، ٦ ، ١١ ، ١٠)

---

(٢) إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ حيث أ(–٢ ، ص) ، ب(٢ ، ١١) ، جـ(س ، ٦) **أوجد** قيمة : س ، ص .

(الأزهر ٢٠١٨)

---

(٣) $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م فإذا كانت ب(٨ ، ١١) ، م(٥ ، ٧) **فأوجد** إحداثي النقطة أ ثم أوجد محيط الدائرة .

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(٤) أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ(٣ ، ٢) ، ب(٤ ، –٥) ، جـ(٠ ، –٣) أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطريه ثم **أوجد** إحداثيي نقطة ء .

(البحيرة ٢٠١٨)

الدرس الثالث
ميل الخط المستقيم

إن كنت ناسي أفكرك :

(١) طبعاً فاكرين من السنة اللي فاتت لما اخدنا كيفية ايجاد ميل المستقيم غير الرأسي المار بالنقطتين أ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب($س_2$ ، $ص_2$) وميل المستقيم هو

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

(٢) إذا كان الخط المستقيم موازياً لمحور السينات فإنه ميله = الصفر .

(٣) إذا كان الخط المستقيم موازياً لمحور الصادات فإن ميله يكون غير معروف .

(٤) إذا لم يكن الخط المستقيم موازياً لأى من محوري الإحداثيات فإن ميله $\in$ ح − {٠}

القياس الموجب والقياس السالب للزاوية :

تكون الزاوية موجبة :

إذا كانت مأخوذة في عكس اتجاه عقارب الساعة .

وتكون سالبة :

إذا كانت مأخوذة في نفس اتجاه حركة عقارب الساعة .

كما يتضح من الشكل المقابل .

ملاحظات هاااامة جداااا

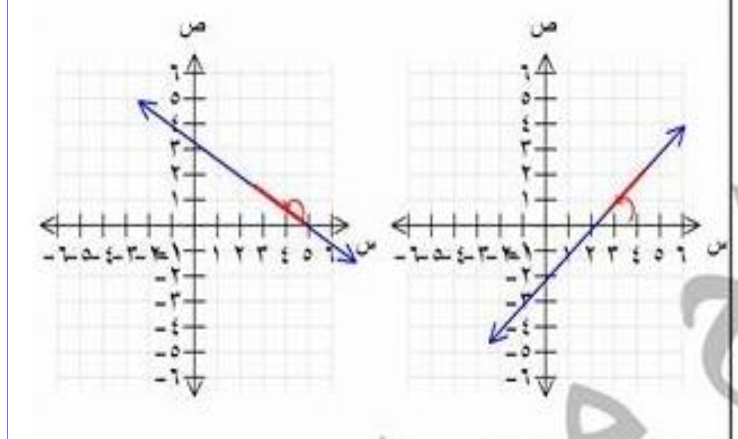
(١) إذا كان الميل > الصفر فإن المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية حادة .

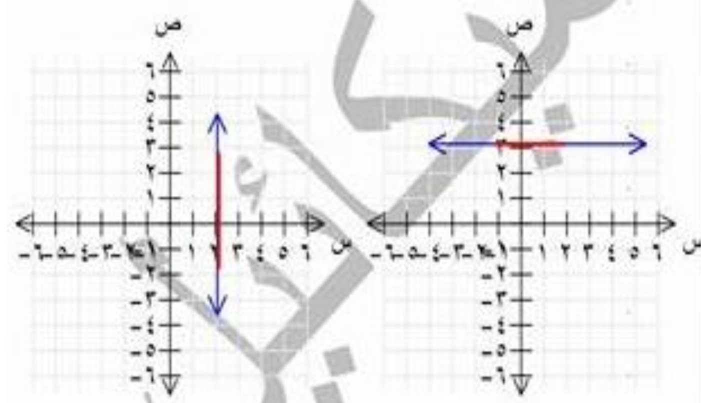
(٢) إذا كان الميل < الصفر فإن المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية منفرجة .

(٣) إذا كان الميل = الصفر فإن المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية صفرية .

(٤) إذا كان الميل غير معرف فإن المستقيم يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قائمة .

والاشكال التالية توضح الحالات السابقة بالترتيب





ونصل إلى تعريف ميل الخط المستقيم :

هو ظل الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

أي أن : ميل الخط المستقيم = ظاهـ حيث هـ الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

مثال ١ : أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٢″ ١٥′ ٦٣°

الحـــل

∵ م = ظاهـ ∴ ظا ١٥′ ١٥′ ٦٣° = ١,٩٨٤٧٣٩٦٧

باستخدام الآلة الحاسبة نتبع الخطوات الآتية :

ابدأ → tan ٦٣ [...] ١٥ [...] ٣٢ = ١,٩٨٤٧٣٩٦٧

مثال ٢ : أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات . إذا كان ميل المستقيم = ٠,٣٥٨

الحـــل

∵ م = ظاهـ ∴ ظاهـ = ٠,٣٥٨

∴ ق(∠هـ) = ٥١″ ٤١′ ١٩°

باستخدام الآلة الحاسبة نتبع الخطوات الآتية :

ابدأ → Shift tan ٠,٣٥٨ = [...] ١٩° ٤١′ ٥١″

تدريب ١ : (١) **أوجد** ميل المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسها :

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠°

الحـــل

(أ) ....

(ب) ....

(جـ) ....

(٢) باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم الذى ميله (م) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحـــل

(أ) م = ٠,٢٣٤ (ب) م = ١,٠٣٢٦

(جـ) م = ٢,٣٦٢٥

(أ) ....

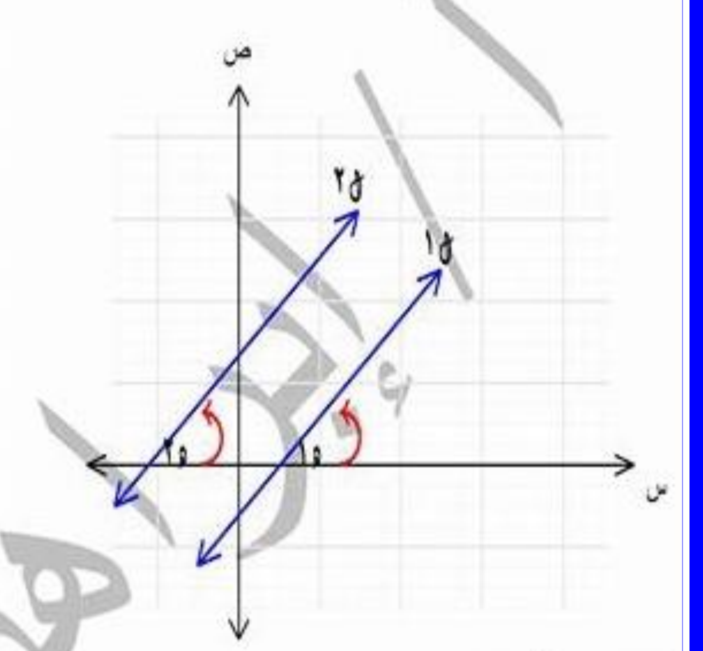
(ب) ....

(جـ) ....



العلاقة بين ميلي المستقيمين المتوازيين :

نفرض أن : $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان متوازيان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب ، ويصنعان زاويتين موجبتين مع الاتجاه الموجب لمحور السينات قياسهما $هـ_١$ ، $هـ_٢$



أكمل ما يأتي :

(١) $ق(\angle هـ_١) = ق(\angle هـ_٢)$

(٢) $ظا هـ_١ = ظا هـ_٢$ (٣) $م_١ = م_٢$

نستنتج مما سبق أن :

إذا كان $ل_١ // ل_٢$ فإن : $م_١ = م_٢$

أي أنه : إذا توازى مستقيمان فإن ميلهما يكونان متساويين ، والعكس صحيح

فإذا كان $م_١ = م_٢$ فإن : $ل_١ // ل_٢$

أي أنه : إذا تساوى ميلا مستقيمين كان المستقيمان متوازيين .

مثال ١ : **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، -١) ، (٦ ، ٣) يوازى المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحل

$\because م_١ = \frac{٣ - (-١)}{٦ - ٢} = \frac{٤}{٤} = ١$ ،

$م_٢ = ظا ٤٥° = ١$

$\because م_١ = م_٢$ $\therefore ل_١ // ل_٢$

مثال ٢ : **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) يوازى المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٦٠°

الحل

$\because م_١ = \frac{٣\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣}}{٥ - ٤} = \sqrt{٣}$ ، $م_٢ =$ ظا ٦٠° $= \sqrt{٣}$

$\because م_١ = م_٢$ $\therefore ل_١ // ل_٢$

مثال ٣ : إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // محور السينات حيث أ(٨ ، -٤) ، ب(-٢ ، ص) **أوجد** : ص

الحل

$\because \overleftrightarrow{أب}$ // محور السينات

$\therefore$ ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = صفر

الموازي للسينات (البسط = صفر)

$\therefore$ ص + ٤ = ٠ $\therefore$ ص = -٤

الموازي للصادات (المقام = صفر)

مثال ٤ : إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ص) والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥° . **فأوجد** قيمة ص إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ متوازيين .

الحـــل

∵ م١ = $\frac{١ - ص}{٣ - ٢}$ = ١ − ص ،

م٢ = ظا ٤٥° = ١

∵ ل١ // ل٢ ∴ ١ − ص = ١ ∴ ص = ٠ .

تدريب : **أكمل ما يأتي** :

(١) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{جـ ء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{٢}{٣}$ فإن ميل $\overleftrightarrow{جـ ء}$ يساوي ....

(٢) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−٢ ، ٣) يساوي ....

(٣) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازى محور السينات حيث أ (٨ ، ٣) ، ب (٢ ، ك) فإن ك = ...

(٤) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جـ ء}$ يوازى محور الصادات حيث جـ (م ، ٤) ، ء (−٥ ، ٧) فإن م = ...

تطبيقات على العلاقة بين المستقيمين المتوازيين :

(١) لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع نثبت أن كل ضلعين متقابلين متوازيين باستخدام الميل .

(٢) لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف نثبت أنه يوجد ضلعين فيه متوازيين وضلعين غير متوازيين باستخدام الميل .

مثال ٥ : **مثل** بيانياً النقط : أ(٢ ، ٣) ، ب (٦ ، ٢) ، (−٢ ، −٢) ، ء (−٢ ، ١) ، ثم **أثبت** أن الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف .

الحـــل

ميل $\overline{أب}$ = $\frac{٣ - ٢}{٢ - ٦}$ = $\frac{١}{-٤}$ = $\frac{-١}{٤}$

ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{٢ + ٢}{٦ + ٢}$ = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$

ميل $\overline{جـ ء}$ = $\frac{٢ + ١}{-٢ + ٢}$ = $\frac{٣}{٠}$ غير معروف

ميل $\overline{أ ء}$ = $\frac{٣ - ١}{٢ + ٢}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

من الرسم نجد أن : ميل $\overline{أ ء}$ = ميل $\overline{بجـ}$

∴ $\overline{أ ء}$ // $\overline{بجـ}$ ⟸ (١)

، ميل $\overline{أب}$ ≠ ميل $\overline{جـ ء}$

∴ المستقيمان غير متوازيان . ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف .

---

(٣) لإثبات أن : أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

نثبت أن : ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{بجـ}$ = ميل $\overline{أجـ}$

(٤) أما إذا كانت النقاط أ ، ب ، جـ على استقامة واحده فإن يكون ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{بجـ}$ = ميل $\overline{أجـ}$

مثال ٦ : **أثبت** أن النقط أ(٤ ، ٣) ، ب(١ ، ١) ، جـ(−٥ ، −٣) تقع على استقامة واحدة .

الحـــل

ميل $\overline{أب} = \frac{١-٣}{١-٤} = \frac{-٢}{-٣} = \frac{٢}{٣}$

ميل $\overline{بجـ} = \frac{-٣-١}{-٥-١} = \frac{-٤}{-٦} = \frac{٢}{٣}$

∵ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{بجـ}$ ، ب نقطة مشتركة بينهما

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة .

مثال ٧ : إذا كانت النقط (٠ ، ١) ، (أ ، ٣) ، (٢ ، ٥) تقع على استقامة واحدة **فأوجد** قيمة أ

الحـــل

نوجد الميل بين نقطتين ونقطتين آخرتين بشرط أن الزوج المرتب الذى به المجهول نأخذه مرة واحدة فقط . يعنى هجيب ميل النقطتين الأولى والثانية وهجيب ميل الأولى والثالثة عشان الزوج المرتب اللى فى النص هو اللى فيه المجهول ما ينفعش يتاخد مرتين .

∵ $م_١ = \frac{٣-١}{أ-٠} = \frac{٢}{أ}$ ، $م_٢ = \frac{٥-١}{٢-٠} = \frac{٤}{٢} = ٢$

∵ النقاط على استقامة واحدة $م_١ = م_٢$

∴ $\frac{٢}{أ} = ٢$ ∴ أ = ١

العلاقة بين ميلي المستقيمين المتعامدين :

الشكل المقابل : يمثل المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ الذى ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

حيث $ل_١ \perp ل_٢$

فإن العلاقة بين

ق(∠هـ) ، ق(∠ى)

تكون : ظاهـ×ظاى = −١

أي أن : $م_١ × م_٢ = -١$

إذا كان $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان ميلاهما $م_١$ ، $م_٢$

وكان $ل_١ \perp ل_٢$ فإن : $م_١ × م_٢ = -١$

أي أن : حاصل ضرب المستقيمين المتعامدين = −١

وعكس ذلك صحيح ، فإذا كان $م_١ × م_٢ = -١$

فإن $ل_١ \perp ل_٢$

أي أن : إذا كان حاصل ضرب ميلي مستقيمين = −١ فإن المستقيمين يكونان متعامدين .

مثال ١ : **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين : (٤ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ، (٥ ، ٢ $\sqrt{٣}$) عمودي على المستقيم الذى يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠° .

الحـــل

نفرض أن ميل المستقيم الأول $م_١$ ، وميل المستقيم الثاني $م_٢$

∴ $م_١ = \frac{٢\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}}{٥-٤} = -\sqrt{٣}$

، ∵ $م_٢ = ظا ٣٠° = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ $م_١ \times م_٢ = -\sqrt{٣} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} = -١$

∴ المستقيمان متعامدان .

مثال ٢ : إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (−٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية موجبة قياسها ٤٥°

أوجد قيمة ك إذا كان $ل_١ \perp ل_٢$

الحل

∵ $م_١ = \frac{ك-١}{٢+٣} = \frac{ك-١}{٥}$ ، ∵ $م_٢ = ظا ٤٥° = ١$

، ∵ $ل_١ \perp ل_٢$ ∴ $م_١ \times م_٢ = -١$

∴ $\frac{ك-١}{٥} \times ١ = -١$ ∴ $ك - ١ = -٥$

∴ $ك = -٤$

تدريب : إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين (٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° فأوجد قيمة ك إذا كان المستقيمان $ل_١$ ، $ل_٢$

أولاً : متوازيان ثانياً : متعامدان

....

....

....

....

....

....

تطبيقات على العلاقة بين المستقيمين المتعامدين

(١) لإثبات أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع – نثبت أن الضلعان المتقابلان متوازيان .

(٢) لإثبات أن الشكل الرباعي مستطيل – نثبت أولاً أن الشكل متوازي أضلاع – ثم نثبت أن فيه ضلعان متعامدان أي أن فيه زاوية قائمة .

(٣) لإثبات أن الشكل الرباعي معين نثبت أن أضلاعه الأربعة متساوية في الطول والقطران متعامدان .

(٤) لإثبات أن الشكل مثلث قائم – نثبت أن فيه ضلعان متعامدان .

(٥) أما إذا كان المثلث قائم فإننا نستنتج أن هناك ضلعان متعامدان .

مثال ٣ : **أثبت** باستخدام الميل أن النقط أ(−١ ، ٣) ، ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هي رؤوس لمستطيل .

الحل

ميل $\overline{أب} = \frac{٣-١}{-١-٥}$ = $\frac{-٢}{٦}$ = $\frac{-١}{٣}$

ميل $\overline{بجـ} = \frac{٤-١}{٦-٥} = \frac{٣}{١} = ٣$

ميل $\overline{جـء} = \frac{٦-٤}{٠-٦} = \frac{٢}{-٦} = \frac{-١}{٣}$

ميل $\overline{أء} = \frac{٦-٣}{٠+١} = \frac{٣}{١} = ٣$

∵ ميل $\overline{أب}$ = ميل $\overline{جـء}$ ، ميل $\overline{بجـ}$ = ميل $\overline{أء}$

∴ الشكل أبجـء متوازي أضلاع .

∵ ميل $\overline{أب}$ × ميل $\overline{بجـ}$ = $\frac{-١}{٣} \times ٣ = -١$

∴ $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ⟸ ق(∠ب) = ٩٠°

∴ الشكل أبجـء مستطيل .

مثال ٤ : إذا كان المثلث الذى رؤوسه ص(٤ ، ٢) ، س(٣ ، ٥) ، ع(−٥ ، أ) قائم الزاوية في ص **فأوجد** قيمة أ .

الحــل

∵ المثلث قائم الزاوية في ص

∴ نوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، ميل $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$

∴ ميل $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فيكون $م_{١} = \frac{٥-٢}{٣-٤} = \frac{٣}{-١} = -٣$

نوجد ميل $\overleftrightarrow{\text{ص ع}}$ فيكون $م_{٢} = \frac{أ-٢}{-٥-٤} = \frac{أ-٢}{-٩}$

∵ المثلث قائم الزاوية في ص ∴ $م_{١} \times م_{٢} = -١$

∴ $-٣ \times \frac{أ-٢}{-٩} = -١$ ∴ $\frac{(أ-٢)}{٣} = -١$

∴ أ − ٢ = −٣ ⟸ أ = ٢ − ٣

∴ أ = −١

تمارين (٣)

(١) **أكمل ما يأتي** :

(١) ميل المستقيم الموازي لمحور الصادات = ...

(٢) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−٢ ، ٣) = ...

(٣) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متعامدان فإن ك = ...

أ ب جـ (٤) مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ (١ ، ٤) ، ب (−١ ، −٢) فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يساوى .....

(٥) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين (أ ، ٠) ، (٠ ، ٣) والمستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات متعامدين فإن أ = ...

(٢) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين** :

(١) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٢}$ متوازيين فإن : ك = ...

($\frac{-٤}{٣}$ ، $\frac{-٣}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، ٣)

(٢) المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ص) ، (٣ ، ٤) ميله يساوي ظاه ٤° فتكون ص = ...

(١ ، −١ ، ٢ ، ١)

(٣) ميل المستقيم الموازي لمحور السينات = ...

(−١ ، صفر ، ١ ، غير معروف)

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ل م}} \perp \overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ ، هـ(−١ ، ٢) ، و(٠ ، ٠) فإن ميل $\overleftrightarrow{\text{ل م}}$ = ...

(−٢ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ٢)

(٥) $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مستقيم يمر بالنقطتين : (٢ ، ٥) ، (٥ ، ٢) أي من النقط التالية ∋ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ؟ ....

((١ ، ٦) ، (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٠) ، (٣ ، −٤))

(٦) إذا كان أ(٠ ، ٠) ، ب(٥ ، ٧) ، جـ(٥ ، هـ) رؤوس المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ فإن هـ = ...

(صفر ، ٥ ، ٧ ، −٥)

(٧) إذا كان أ(٣ ، ٥) ، ب(٢ ، −١) ، جـ(س ، ص) فإن إحداثيي نقطة جـ التي تجعل Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب هي ....

((٦ ، −١) ، (−٤ ، ٥) ، (٣ ، −٢) ، (٨ ، −٢))

(٣) **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين أ (–٣ ، ٤)، ج (–٣ ، –٢) عمودي على المستقيم المار بالنقطتين ب (١ ، ٢)، ء (–٣، ٢)

---

(٤) إذا كانت النقط أ (–١ ، ٣)، ب (٥ ، ١)، ج (٦ ، ٤)، ء (٠ ، ٦) في مستوى إحداثي متعامد **فأثبت** أن الشكل أ ب ج ء مستطيل . وأوجد طول قطره .

---

(٥) في الشكل المرسوم :

أ ب ج ء شبه منحرف فيه :

$\overline{أب}$ // $\overline{جء}$ ،

أ (٩، –٢)، ب (٣ ، ٢)،

ج (س ، –س)، ء (٤، –٣)

أوجد إحداثيي نقطة ج

---

(٦) **أثبت** أن : المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٠) يوازي المستقيم المار بالنقطتين : (–١ ، ٤)، (١، ٧)

---

(٧) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ // محور الصادات ، حيث أ (س ، ٧)، ب (٣، ٥) **فأوجد** قيمة : س .

---

(٨) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{جء}$ // محور السينات ، حيث ج (٤ ، ٢)، ء (–٥ ، ص) **فأوجد** قيمة : ص

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

(أسوان ٢٠١٨)

(١) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ٣)، (–٢ ، ٣) يساوي ....

(–١ ، صفر ، $\frac{١}{٢}$ ، غير معرف)

(بني سويف ٢٠١٨)

(٢) إذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يوازي محور السينات حيث أ (٨ ، ٣)، ب (١ ، ك) فإن ك = ...

(–٣ ، ٢ ، ٣ ، ٨)

(الشرقية ٢٠١٨)

(٣) ميل المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ٣)، (٢ ، –٣) هو ......

(صفر ، $\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، غير معروف)

(البحيرة ٢٠١٨)

(٤) إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ⊥ $\overleftrightarrow{جء}$ وكان ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = $\frac{١}{٢}$ فإن : ميل $\overleftrightarrow{جء}$ = ...

(–٢ ، –١ ، ١ ، ٢)

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

(٥) إذا كان $م_١$ ، $م_٢$ ميلي مستقيمين متعامدين فإن : $م_١ \times م_٢$ = ...

(–١ ، $\frac{-١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، ١)

(قنا ٢٠١٨)

(٦) ميل المستقيم الموازي للمستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ٣)، (–٢ ، ١) يساوي ....

($\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، $\frac{-١}{٢}$ ، ٢)

(بني سويف ٢٠١٨)

(٧) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب حيث :

أ(١ ، ٢) ، ب(٢ ، ٥) فإن ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$ يساوي ....

(٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $-\frac{١}{٣}$ ، ـ٣)

(الأزهر ٢٠١٨)

(٨) إذا كان المستقيمان اللذان ميلاهما $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{ك}{٦}$

متوازيين فإن ك = ...

(٣ ، ٦ ، ٤ ، ـ٤)

---

(٢) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين : (أ ، ٠) ، (٠ ، ٣)

والمستقيم الذي يصنع زاوية قياسها ٣٠° مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات متعامدان **فأوجد** قيمة أ .

(القليوبية ٢٠١٨)

---

(٣) إذا كان المثلث الذي رؤوسه س (٣ ، ٥) ، ص (٤ ، ٢)

، ع (ـ٥ ، أ) قائم الزاوية في ص .

أوجد :

أولاً : قيمة أ   ثانياً : مساحة المثلث .

(الدقهلية ٢٠١٨)

---

(٤) إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين :

(٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

فأوجد قيمة : ك إذا كان :

(١) $ل_١ // ل_٢$ (٢) $ل_١ \perp ل_٢$

(الإسكندرية ٢٠١٨)

---

(٥) **أثبت** أن المستقيم المار بالنقطتين :

(٥ ، ٣ $\sqrt{٣}$) ، (٤ ، ٢ $\sqrt{٣}$) يوازي المستقيم الذي يصنع

مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٦٠°

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(٦) **أثبت** أن النقط : أ(ـ٣ ، ـ١) ، ب(٦ ، ٥) ،

جـ (٣ ، ٣) على استقامة واحدة .

(الفيوم ٢٠١٨)

---

(٧) إذا كانت النقط : ل (أ ، ٣) ، م (٠ ، ١) ، ن (٢ ، ٥)

على استقامة واحدة **أوجد** قيمة أ .

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(٨) إذا ا كان أ(٤ ، ٣) ، ب (٧ ، ٠) ، جـ (١ ، ـ٢) ،

ء (٤ ، ٢) **أثبت** أن :

(١) $\overline{أء}$ // $\overline{بجـ}$ (٢) الشكل أ ب جـ ء شبه منحرف .

(البحيرة ٢٠١٨)

---

(٩) **أثبت** باستخدام الميل أن النقط : أ(ـ١ ، ٣) ،

ب (٥ ، ١) ، جـ (٦ ، ٤) ، ء (٠ ، ٦) هي رؤوس مستطيل .

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(١٠) إذا كان المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطتين :

(٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم $ل_٢$ يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° وكان :

$ل_١ // ل_٢$ ، **فأوجد** قيمة ك .

(دمياط ٢٠١٨)

الدرس الرابع
معادلة الخط المستقيم

هناك عدد من الصور لمعادلة الخط المستقيم :

الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

(١) الصورة العامة : أس + ب ص + جـ = ٠

الميل = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}} = \frac{-أ}{ب}$

(٢) الصورة الخاصة : ص = م س + جـ

الميل = م أو $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ملاحظات هاااامة جدااااا : لازم تركز فى اللى جاااى كويس

(١) إذا كان المستقيم ل يوازى محور السينات ويمر بالنقطة (٠ ، أ) فإن معادلته هي ص = أ

مثلاً : معادلة المستقيم المار بالنقطة (٠ ، ٣) ويوازى محور السينات هي ص = ٣

(٢) إذا كان المستقيم ل يوازى محور الصادات ويمر بالنقطة (ب ، ٠) فإن معادلته هي س = ب

مثلاً : معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٠) ويوازى محور السينات هي س = ٣

(٣) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠ ونوجد س .

فتكون النقطة هي (س ، ٠)

مثلاً : إذا كانت ص = ٢س + ٦ فلإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع ص = ٠

∴ ٠ = ٢س + ٦ ⟸ ٢س = −٦ ومنها س = −٣

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (−٣ ، ٠)

(٤) لإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد ص فتكون النقطة هي (٠ ، ص)

مثلاً : إذا كانت ٥ص = ٢س + ٦ فلإيجاد نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات نضع س = ٠

∴ ٥ص = ٠ + ٦ ⟸ ٥ص = ٦ ومنها ص = $\frac{٦}{٥}$

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات هي (٠ ، $\frac{٦}{٥}$)

مثال ١ : أوجد ميل الخط المستقيم :

٣س + ٤ص − ٥ = ٠ ثم **أوجد** طول الجزء المقطوع من محور الصادات والجزء المقطوع من محور السينات .

الحـــل

∵ معادلة الخط المستقيم على الصورة :

أس + ب ص + جـ = ٠

∴ ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$ ∴ ميل المستقيم = $\frac{-٣}{٤}$

طول الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{٥}{٤} = \frac{-جـ}{ب}$

طول الجزء المقطوع من محور السينات = $\frac{-جـ}{أ} = \frac{٥}{٣}$

انتبه انتبه خد بالك :

المعادلة $\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$ اسمها معادلة الأجزاء المقطوعة من المحاور

ولازم نحولها إلى أحدى صور المعادلات السابقة وده عن طريق الضرب × مضاعف المقامين

مثال ٢ : **أوجد** الميل والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذى معادلته $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$

الحل

∵ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ١$ ∴ بالضرب × ٦

∴ ٣س + ٢ص = ٦

الميل = $\frac{-أ}{ب} = \frac{-٣}{٢}$

الجزء المقطوع من محور الصادات = $\frac{جـ}{ب} = \frac{٦}{٢} = ٣$

تكوين معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله وطول الجزء المقطوع من محور الصادات

معادلة الخط المستقيم هي : ص = م س + جـ

حيث : م الميل ،

جـ الجزء المقطوع من محور الصادات

أولاً : معادلة المستقيم إذا علم الميل والجزء المقطوع من محور الصادات :

مثال ٢ : مستقيم ميله $\frac{١}{٢}$ ويقطع جزءاً موجباً من محور الصادات طوله وحدتين أوجد :

أولاً : معادلة المستقيم

ثانياً : نقطة تقاطعه مع محور السينات

الحل

أولاً : ∵ م = $\frac{١}{٢}$ ، جـ = ٢

∵ ص = م س + جـ

∴ المعادلة هى : ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٢ ∴ ٢ص = س + ٤

ثانياً : بوضع ص = ٠ ∴ ٠ = س + ٤ ∴ س = -٤

∴ نقطة تقاطع المستقيم مع محور السينات (-٤ ، ٠)

تدريب ١ : **أوجد** معادلة المستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من محور الصادات جزءاً سالباً طوله ٥

الحل

....

....

....

....

ثانيا : معادلة المستقيم المار بنقطة واحدة معلومة

مثال ٤ : **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، – ٥) ويوازي المستقيم س + ٢ص – ٧ = ٠

الحل

∵ المستقيم // مستقيم آخر معادلته س + ٢ص – ٧ = ٠

∴ فإنهما لهم نفس الميل .

وبالتالي نوجد الميل من المعادلة والنقطة المار بها المستقيم نعوض بها لنجد منها الجزء المقطوع

∵ ص = م س + جـ ،

∵ م = $\frac{-أ}{ب} = \frac{-١}{٢}$ ، جـ = ؟

∴ ص = $\frac{-١}{٢}$ س + جـ ،

∵ المستقيم يمر بالنقطة (٣ ، – ٥) ∴ فهي تحقق معادلته .

∴ -٥ = $\frac{-١}{٢}$ × ٣ + جـ   ∴ -٥ = $\frac{-٣}{٢}$ + جـ

∴ جـ = -٥ + $\frac{٣}{٢}$ ∴ جـ = $\frac{-٧}{٢}$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-١}{٢}$ س - $\frac{٧}{٢}$

مثال ٥ : **أوجد** معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، ٤) وعمودي على المستقيم ٥س – ٢ص + ٧ = ٠

الحل

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{٥}{٢}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٢}{٥}$

∴ ص = $\frac{-٢}{٥}$ س + جـ

∵ (٣ ، ٤) تحقق المعادلة

∴ ٤ = $\frac{-٢}{٥}$ × ٣ + جـ   ∴ جـ = ٤ + $\frac{٦}{٥}$ = ٥ $\frac{١}{٥}$

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-٢}{٥}$ س + $\frac{٢٦}{٥}$

مثال ٦ : **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢) وعمودي على الخط المستقيم المار بالنقطتين أ (٢ ، –٣)، ب (٥ ، –٤)

الحل

∵ ميل المستقيم المعطى = $\frac{-٤ - (-٣)}{٥ - ٢} = \frac{-١}{٣}$

∴ ميل المستقيم المطلوب = ٣

∴ ص = ٣س + جـ   ∵ (١ ، ٢) تحقق المعادلة

∴ ٢ = ٣ × ١ + جـ   ∴ جـ = ٢ - ٣ = -١

المعادلة هي : ص = ٣س - ١

ثالثا: معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين :

نستخرج من النقطتين الميل ونختار أي نقطة فيهم نعوض بها في المعادلة لنحصل على الجزء المقطوع

مثال ٧ : **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ٦)، (٢ ، ٣)

الحل

∵ ميل المستقيم = $\frac{٣ - ٦}{٢ - ١}$ = -٣

معادلة المستقيم هي :

ص = -٣س + جـ

∵ (١ ، ٦) تحقق المعادلة   ∴ ٦ = -٣ × ١ + جـ

∴ جـ = ٣ + ٦ = ٩

∴ المعادلة هي : ص = -٣س + ٩

مثال ٨ : **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة : (١ ، ٦)

ومنتصف $\overline{أب}$ حيث أ (١ ، −٢)، ب (٣ ، −٤)

الحـــل

نفرض أن ء منتصف $\overline{أب}$

∴ ء = $\left(\frac{١+٣}{٢} ، \frac{-٢-٤}{٢}\right)$ = (٢ ، −٣)

∴ ميل المستقيم = $\frac{-٣-٦}{٢-١}$ = −٩

∴ معادلة المستقيم هي : ص = −٩س+جـ

∵ (١ ، ٦) تحقق المعادلة

∴ ٦ = −٩×١+جـ ∴ جـ = ٩+٦ = ١٥

∴ المعادلة هي : ص = −٩س+١٥

مثال ٩ : **أوجد** معادلة المستقيم الذى يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزئين موجبين طولهما ٤ ، ٩ على الترتيب .

الحـــل

∵ المستقيم يمر بالنقطتين (٤ ، ٠)، (٠ ، ٩)

∴ ميل المستقيم = $\frac{٩-٠}{٠-٤}$ = $\frac{٩}{-٤}$ = $\frac{-٩}{٤}$

∴ معادلة المستقيم هي : ص = $\frac{-٩}{٤}$س+جـ

∵ (٤ ، ٠) تحقق المعادلة

∴ ٠ = $\frac{-٩}{٤}$×٤+جـ ∴ جـ = ٩

∴ المعادلة هي : ص = $\frac{-٩}{٤}$س+٩

تمارين (٤)

(١) **اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-**

(١) المستقيم الذي معادلته : ٢س − ٣ص − ٦ = ٠ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ....

(−٦ ، −٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢)

(٢) إذا كان المستقيمان : ٣س − ٤ص − ٣ = ٠ ، ك ص + ٣س − ٨ = ٠ متعامدان فإن : ك = ...

(−٤ ، −٣ ، ٣ ، ٤)

(٣) إذا كان المستقيمان : س + ص = ٥ ، ك س + ٢ص = ٠ متوازيان فإن : ك تساوي ....

(−٢ ، −١ ، ١ ، ٢)

(٤) مساحة المثلث بالوحدات المربعة المحدد بالمستقيمات : ٣س − ٤ص = ١٢ ، س = ٠ ، ص = ٠ يساوي ....

(٦ ، ٧ ، ١٢ ، ١٥)

(٥) ميل المستقيم الذي معادلته : ٢س − ٣ص + ٥ = ٠ يساوي .....

($\frac{-٣}{٢}$ ، $\frac{-٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$)

(٦) إذا كان المستقيم : س + ٣ص − ٦ = ٠ عمودياً على المستقيم : أس − ٣ص + ٧ = ٠ فإن : أ = ...

(٢ ، ٩ ، ٤ ، ١)

(٧) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٢ ، −٣) يوازي محور السينات هي ....

(س = −٢ ، ص = −٣ ، س = ٢ ، ص = ٣)

(٨) معادلة المستقيم الذي ميله يساوي ١ ويمر بنقطة الأصل هي ......

(س = ١ ، ص = ١ ، ص = س ، ص = −س)

(٩) معادلة المستقيم الذي معادلته (−٢ ، ٧) ويوازي محور الصادات هي ....

(س = −٢ ، ص = −٢ ، ص = ٧ ، س = ٧)

(١٠) إذا كانت النقطة (٠ ، أ) تنتمي للمستقيم : ٣س − ٤ص + ١٢ = ٠ فإن : أ = ...

(−٣ ، −٤ ، ٣ ، ٤)

---

(٢) **أوجد** معادلة الخط المستقيم الذى ميله يساوى ميل الخط المستقيم $\frac{ص-١}{س} = \frac{١}{٣}$ ويقطع جزءاً سالباً من محور الصادات مقداره ٣ .

---

(٣) **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، −٦) ويوازى المستقيم الذى يصنع زاوية موجبة قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

---

(٤) **أوجد** معادلة الخط المستقيم العمودي على $\overline{أب}$ من نقطة منتصفها حيث أ (١ ، ٣)، ب (٣ ، ٥)

---

(٥) $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة التى مركزها م فإذا كانت ب (٨ ، ١١) ، م (٥ ، ٧) **فأوجد** :

أولاً : إحداثي أ

ثانياً : معادلة المستقيم العمودي على $\overline{أب}$ من نقطة ب

---

(٦) **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين :

(٢ ، ٣)، (−٣ ، ٢)

---

(٧) **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين :

(٤ ، ٢)، (−٢ ، −١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .

---

(٨) في الشكل المقابل : جـ منتصف $\overline{أب}$.

(أ) وأ = ... وحدة طول

(ب) وب = ... وحدة طول

(جـ) ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = ...

(ى) ميل $\overleftrightarrow{جـو}$ = ...

(هـ) ميل $\overleftrightarrow{أو}$ = ...

(و) ميل $\overleftrightarrow{بو}$ = ...

(ن) جـ هي مركز الدائرة المار بالنقط :

.... ، .... ، ....

(ى) مساحة Δ وأب = ...

(ك) محيط Δ وأب = ...

(ل) معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هي ....

(م) معادلة $\overleftrightarrow{جـو}$ هي ....

---

(٩) إذا كانت معادلتي المستقيمين : $ل_١$ ، $ل_٢$ هما على الترتيب : ٢س − ٣ص + أ = ٠ ، ٣س + ب ص − ٦ = ٠

فأوجد :

أولاً : قيمة ب التي $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيين .

ثانياً : قيمة ب التي $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدين .

ثالثاً : إذا كانت النقطة (١ ، ٣) تقع على المستقيم $ل_١$ فأوجد قيمة أ .

مسائل وردت في امتحانات المحافظات العام الماضي

(١) اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :-

(القليوبية ٢٠١٨)

(١) المستقيم الذي معادلته : ٢س – ٣ص – ٦ = صفر يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ....

(–٦ ، –٢ ، $\frac{٢}{٣}$ ، ٢)

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

(٢) المستقيم الذي معادلته : ص = ٣س + ٦ يقطع من محور الصادات جزءاً طوله ....

($\frac{٣}{٢}$ ، ٢ ، ٢ ، ٦)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٣) إذا كان المستقيمان : ٣س – ٤ص – ١ = ٠ ، ك ص + ٣س = ٠ متوازيين فإن : ك = ...

(٣ ، –٣ ، ٤ ، –٤)

(الغربية ٢٠١٨)

(٤) إذا كان المستقيم الذي معادلته : ص = ك س + ٥ يوازي محور السينات فإن ك = ...

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

(سوهاج ٢٠١٨)

(٥) ميل المستقيم الذي معادلته : ٦س – ٢ص + ٧ = ٠ يساوي ....

(٢ ، –٣ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١}{٣}$)

(الجيزة ٢٠١٨)

(٦) ميل المستقيم العمودي على المستقيم : ص = س – ٤ $\frac{٣}{٢}$ يساوي ....

($\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، –٤ ، $\frac{-٢}{٣}$)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٧) معادلة المستقيم المار بالنقطة (–٢ ، –٣) ويوازي محور السينات هي ....

(س = –٢ ، ص = –٣ ، ص = –٢ ، س = –٣)

(الإسكندرية ٢٠١٨)

(٨) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (٣ ، –٥) ويوازي محور الصادات هي ....

(س = –٥ ، ص = –٥ ، س = ٥ ، ص = ٥)

(الأزهر ٢٠١٨)

(٩) معادلة المستقيم الذي ميله = ٥ ويمر بنقطة الأصل هي ....

(س = ٥ ، ص = ٥ ، ص = ٥س ، ص = –٥س)

(الشرقية ٢٠١٨)

(١٠) معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويقطع ٤ وحدات من محور الصادات الموجب هي ....

(س=٣ص+٤ ، ص=٤س+٣ ، ص=٣س+٤ ، ص=٤)

---

(٢) **أثبت** أن : المستقيم الذي معادلته : $\sqrt{٣}$س + ص + ٥ = ٠ عمودياً على المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٣٠°

(أسوان ٢٠١٨)

---

(٣) **أثبت** أن المستقيمين : $ل_١$ ، $ل_٢$ متعامدان حيث :

$ل_١$: ٢س – ٣ص = ٥

$ل_٢$: ٦س + ٤ص – ١١ = ٠

(المنيا ٢٠١٨)

---

(٤) إذا كان المستقيم الذي يمر بالنقطتين :
(٢ ، –١) ، (٥ ، ١) يوازي المستقيم الذي معادلته :
أ س + ٣ص + ٥ = ٠ **أوجد** قيمة أ .
(الغربية ٢٠١٨)

---

(٥) إذا كان المستقيمان ل١ ، ل٢ متعامدان :
ومعادلة ل١ هي ص = (س + ٣) / ٢
ومعادلة ل٢ هي أ س + ٣ص – ٥ = ٠
فأوجد قيمة أ .
(الشرقية ٢٠١٨)

---

(٦) المستقيم : أ س + ٣ص – ٦ = ٠ يمر بالنقطة
(١ ، ٣) **أوجد** قيمة أ . ثم **أوجد** طول الجزء المقطوع من
محور الصادات بهذا المستقيم .
(الدقهلية ٢٠١٨)

---

(٧) إذا كان المستقيم المار بالنقطتين :
(–١ ، ٣) ، (ك ، ٤) يوازي المستقيم الذي معادلته :
٣ص – س – ١ = ٠ **أوجد** قيمة ك .
(الاسماعيلية ٢٠١٨)

---

(٨) **أوجد** الميل والجزء المقطوع من محور الصادات
للمستقيم الذي معادلته : س/٦ + ص/٨ = ١
(المنيا ٢٠١٨)

---

(٩) **أوجد** معادلة المستقيم الذي ميله ٢ ويمر بالنقطة (١ ، ٠)
(شمال سيناء ٢٠١٨)

(١٠) **أوجد** معادلة المستقيم الذي ميله ٣ ويمر بالنقطة (٢ ، ٠)
(أسوان ٢٠١٨)

---

(١١) **أوجد** معادلة المستقيم الذي ميله ٣/٢ ويمر بالنقطة (٢ ، ٦)
(المنيا ٢٠١٨)

---

(١٢) **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –٥)
ويوازي المستقيم : س + ٢ص = ٧
(القليوبية ٢٠١٨)

---

(١٣) **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٢)
وعمودي على المستقيم : س + ص = ٧
(الدقهلية ٢٠١٨)

---

(١٤) **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة
(٢ ، –٥) ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات
زاوية قياسها ٤٥°
(الشرقية ٢٠١٨)

---

(١٥) **أوجد** معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين :
(٤ ، ٢) ، (–٢ ، –١) ثم أثبت أنه يمر بنقطة الأصل .
(الإسكندرية ٢٠١٨)

---

(١٦) **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطتين :
(١ ، ٣) ، (–١ ، –٣)
(البحر الأحمر ٢٠١٨)

(١٧) **أوجد** معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل ويوازي المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ١) ، (–٤ ، –٣) .

(الشرقية ٢٠١٨)

---

(١٨) **أوجد** معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محوري الإحداثيات السيني والصادي جزأين موجبين طولاهما ٤ ، ٩ على الترتيب .

(كفر الشيخ ٢٠١٨)

---

(١٩) في الشكل المقابل : المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ يقطع من المحور السيني جزءاً طوله ٣ وحدات ، ق(∠أ ب و) = ٤٥°

أوجد معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$

(الغربية ٢٠١٨)

---

(٢٠) في الشكل المقابل : المستقيمان $ل_1$ ، $ل_2$ متعامدان : ، المستقيم $ل_1$ يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥° ، أ ∈ $ل_2$ حيث أ(٠ ، ٦)

أوجد : (١) معادلة المستقيم $ل_1$.

(٢) معادلة المستقيم $ل_2$.

(٣) نقطة تقاطع المستقيم $ل_2$ مع محور السينات

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

اختبار الوحدة الخامسة

س١ : اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين :ـ

(الاسماعيلية ٢٠١٨)

(١) إذا كانت جا٤س = $\frac{1}{2}$ حيث ٤س زاوية حادة فإن : ق(∠س) = ... °

(٣٠ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ١٥)

(دمياط ٢٠١٨)

(٢) إذا كانت نقطة الأصل هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ حيث أ(٥ ، –٢) فإن إحداثيي ب = ...

((٢ ، –٥) ، (٥ ، ٢) ، (–٥ ، ٢) ، (٠ ، ٠))

(الإسكندرية ٢٠١٨)

(٣) عدد محاور التماثل في المثلث المتساوي الساقين يساوي ......

(صفر ، ١ ، ٢ ، ٣)

(أسيوط ٢٠١٨)

(٤) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه : ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ٢٠٠° فإن ق(∠ب) = ... °

(٥٠ ، ٨٠ ، ١٠٠ ، ١٦٠)

(أسوان ٢٠١٨)

(٥) البعد بين النقطتين : (٣ ، ٠) ، (–٤ ، ٠) يساوي ..... وحدة طول

(٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧)

(المنيا ٢٠١٨)

(٦) معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، –٤) ويوازي محور الصادات هي ....

(ص = –٤ ، س = ٣ ، ص = ٣ ، س = –٤)

س٢ : **أوجد** معادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٥)

وعمودياً على المستقيم الذي ميله = $\frac{-١}{٢}$

(الغربية ٢٠١٨)

س٣ : إذا كان المستقيم ل١ يمر بالنقطتين :

(٣ ، ١) ، (٢ ، ك) والمستقيم ل٢ يصنع مع الاتجاه

الموجب لمحور السينات زاوية قياسها ٤٥°

فأوجد قيمة ك إذا كان ل١ ⊥ ل٢

(الإسكندرية ٢٠١٨)

س٤ : أ ب جـ ء متوازي أضلاع تقاطع قطراه في م

حيث : أ (٣ ، −١) ، ب (٦ ، ٢) ، جـ (١ ، ٧) **أوجد**

إحداثيي كلاً من م ، ء

(الغربية ٢٠١٨)

س٥ : في الشكل المقابل :

إذا كان و أ ب جـ مستطيل

حيث ب (٥ ، ١٢)

أوجد طول $\overline{أجـ}$

(الاسماعيلية ٢٠١٨)
